Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój

Rzeczpospolita Polska

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

Wzorcowe materiały dydaktyczne w zakresie:

MATEMATYKA

Bronisław Pabich

Wrocław miasto spotkań | DOLNY ŚLĄSK | Dolnośląska Biblioteka Pedagogiczna we Wrocławiu | Uniwersytet Wrocławski | GMINA DŁUGOŁĘKA | Wrocławskie Centrum Doskonalenia Nauczycieli | Dolnośląska Szkoła Ćwiczeń

WSTĘP

Niniejsza publikacja powstała z myślą o nauczycielach matematyki i ich uczniach. Nauczyciele bardzo się starają, by wzbudzić większe zainteresowanie uczniów i wyzwolić w nich zaangażowanie. Uczniowie natomiast oczekują od polskiej szkoły ciekawych lekcji inspirujących ich do samodzielnej pracy i poszukiwania własnych pomysłów.

Niniejszą publikacją chciałbym zainspirować nauczycieli do takich działań, by obie wymienione grupy społeczne były zadowolone ze współpracy ze sobą. Pragnąłbym, aby pasje matematyczne, które podobno posiadam, były przelane na nauczycieli, a potem na ich uczniów.

Książka, którą trzymają Państwo w swoich rękach, ma mieć charakter podręcznika dydaktycznego z matematyki wspomagającego Państwa pracę w szkołach podstawowych i szkołach średnich, które tu będę nazywał liceami.

Składa się ona z lekcji, które zawierają konkretne problemy lub serie kilku lekcji dotyczących tematyki skupionej wokół jednego zagadnienia. Starałem się o to, by tematy lekcji dla uczniów liceum były przeniesieniem na wyższy poziom tematyki poznanej wcześniej w szkole podstawowej.

Każda lekcja składa się z wstępnych uwag dydaktycznych dla nauczyciela, w których przekazuję cele i sposoby przeprowadzenia lekcji oraz samej lekcji, która jest najczęściej skonstruowana (jeśli się to da) na bazie pliku dynamicznego GeoGebry. W ten sposób nauczyciel może po przeczytaniu uwag dydaktycznych przeprowadzić taką lekcję według moich wskazówek. Nie będzie ona swych charakterem przypominać tradycyjnie przeprowadzanych lekcji matematyki, gdyż narzędzia używane do nich to głównie pliki dynamicznych programów komputerowych.

Jestem gorącym zwolennikiem nauczania matematyki przez jej odkrywanie, które może się odbywać z powodzeniem z użyciem technologii komputerowych, gdyż narzędzia te pozwalają odbywać na lekcji eksperymenty, w wyniku których uczeń poznaje i definiuje nowe obiekty i stawia hipotezy będące przyczynkiem do odkrywania nieznanych im twierdzeń.

Narzędziami stosowanymi w tej publikacji są: program ***GeoGebra*** (polecam wersję 5.0) oraz ***SketchUp*** (polecam wersję 15.0). Oba programy są darmowe i można je w każdej chwili pobrać z Internetu. Od dwóch miesięcy program SketchUp przejęła od Google firma Trimble, która zmieniła politykę dostępu do tego programu.

Wspomniane programy komputerowe są dynamiczne, pozwalają uczniom inaczej spojrzeć na matematykę i wyzwolić w nich dynamiczny sposób myślenia. To właśnie jest tą nowością, która ***zmienia sposób nauczania matematyki***.

Konstrukcje dynamiczne darmowego programu komputerowego GeoGebra dają inne światło na poznawanie matematyki i lepsze jej zrozumienie. Poruszające się obiekty poznawane przez uczniów stają się obiektami, na których dokonujemy eksperymentów, dzięki którym uczniowie:

- uczą się eksperymentować z matematyką,
- odkrywać ją,
- samodzielnie poznawać i definiować nowe pojęcia,
- obserwować wszystkie możliwe przypadki danej sytuacji,
- prawidłowo postrzegać przestrzeń trójwymiarową,
- szybko dostrzegać niezmienniki obiektów w trakcie zmiany ich kształtu, wielkości i położenia względem innych obiektów,
- poszukiwać heurystyk pozwalających rozwiązywać trudne zadania,
- stawiać dostrzeżone hipotezy i uczyć ich dowodzenia,
- kształcić wyobraźnię przestrzenną uczniów.

Lekcje tak przeprowadzone są nie tylko efektowniejsze ale również i efektywniejsze. Uczniowie z większym zainteresowaniem angażują swoje siły mentalne, czują się odkrywcami, a nauczyciel łatwiej może oceniać ich pracę na lekcji. Przyszli inżynierowie, fizycy, technicy, konstruktorzy i ekonomiści, ucząc się w taki sposób, są przygotowani do innego myślenia w swoim przyszłym zawodzie, w sytuacjach nowych, nieznanych, wymagających dobrej wyobraźni i podejmowania prawidłowych decyzji.

Konstrukcje GeoGebry są utworzone w taki sposób, że pozwalają przeprowadzić całą lekcję krok po kroku lub cofnąć ją, a nawet rozpocząć od nowa. Uczeń, który z jakichś ważnych powodów nie był na lekcji, może tę lekcję powtórzyć samodzielnie w domu. Wystarczy mu tylko dostarczyć ją na płytce lub wysłać e-mailem.

Tak przygotowana konstrukcja umożliwia estetyczne wykonanie konstrukcji, wykresu, przekształcenia lub zmiany parametrów rozwiązywanej sytuacji. Uczniowie oczywiście muszą samodzielnie wykonać konstrukcje, narysować omawiane obiekty, grafy funkcji i sporządzić notatki w swoich zeszytach, na co mamy czas, gdyż dzięki komputerowi przeprowadzamy lekcje w formie „przyspieszonej" i bardzo dokładnej. Wiemy z własnego doświadczenia, jak czasami „pechowo" i nieudolnie narysowana na tablicy sytuacja może zepsuć całą lekcję. Nie możemy oszukiwać ucznia. Musimy wykonać dla niego bardzo dokładnie wizualizację na ekranie komputera. Ponadto należy pamiętać, że mamy lekcję realizowaną dynamicznie, a więc ujawniającą o wiele więcej szczegółów niż lekcja przeprowadzona ze zwykłą tablicą. W sytuacji, gdy uczeń popełni jakiś błąd, możemy go szybko zweryfikować, poprawić, a przy odrobinie szczęścia odkryć coś nieznanego nam.

Tak przeprowadzane lekcje są bardziej interesujące dla uczniów. Uczniowie po takich lekcjach mówią, że „coś ciekawego się na lekcji działo". Ja ze swojego doświadczenia w pracy z uczniami przy komputerze (od 1993 roku z programem Cabri, a potem z GeoGebrą) muszę potwierdzić jeszcze jeden ważny efekt takiego nauczania: ***uczniowie zmieniają swoje myślenie***, które nazwałem „myśleniem dynamicznym". Objawia się to niezwykłymi reakcjami uczniów w trakcie lekcji. Na przykład stwierdzają, że jeśli będziemy poruszać myszą jakiś punkt po pewnym obiekcie (przykładowo po prostej), to inny punkt (oni go wskazują) będzie się poruszał po innym obiekcie – też go wskazują. Oczywiście uczniowie powinni przenieść wszystko to, co dzieje się na ekranie komputera, projektora lub tablicy interaktywnej do swoich zeszytów. Mogą, a nawet powinni wykonać komórką zrzut ekranu, by w zaciszu domowym jeszcze raz przemyśleć rozwiązywane problemy z lekcji.

Moje badania w szkole średniej po trzech miesiącach uczenia matematyki z komputerem w taki sposób dały takie rezultaty, jakich nie dało uczenie przy tradycyjnej tablicy. W wielu przypadkach, popełniając błąd, uczniowie odkrywali dzięki niemu nowe nieznane twierdzenia ze szkolnej matematyki.

Uczniowie szkoły podstawowej jeszcze łatwiej radzili sobie na takich zajęciach z matematyki. Nie byli „zarażeni" tradycyjnym nauczaniem i z łatwością samodzielnie pracowali przy komputerze. Uczniowie klasy II i III SP na dodatkowych zajęciach w jednej z wiejskich szkół z powodzeniem budowali z brył platońskich w programie SketchUp wielościany archimedesowe przez odcinanie ich fragmentów po uprzednim rozcinaniu ich odpowiednimi płaszczyznami. Przygotowanie do pracy z tym programem wymagało tylko ośmiu godzin. Potem już sami wiedzieli, co i w jaki sposób należy usuwać z wielościanu bazowego, by uzyskać inny. Ich pomysły były nieraz dla mnie miłym zaskoczeniem.

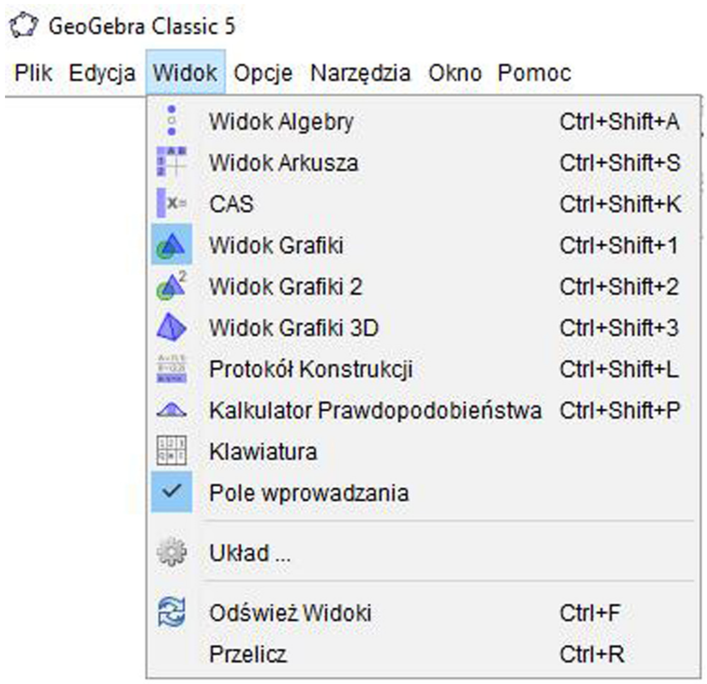
W publikacji tej używane są narzędzia programu GeoGebra oraz programu SketchUp. Nauczycielom, którzy nie spotkali się z tymi programami, dedykuję mały instruktaż posługiwania się nimi.

GeoGebra pracuje w kilku trybach zwanych w programie widokami. Każdy z nich uruchamiamy, wybierając wcześniej opcję ***Widok*** w menu głównym programu (rys. 1).

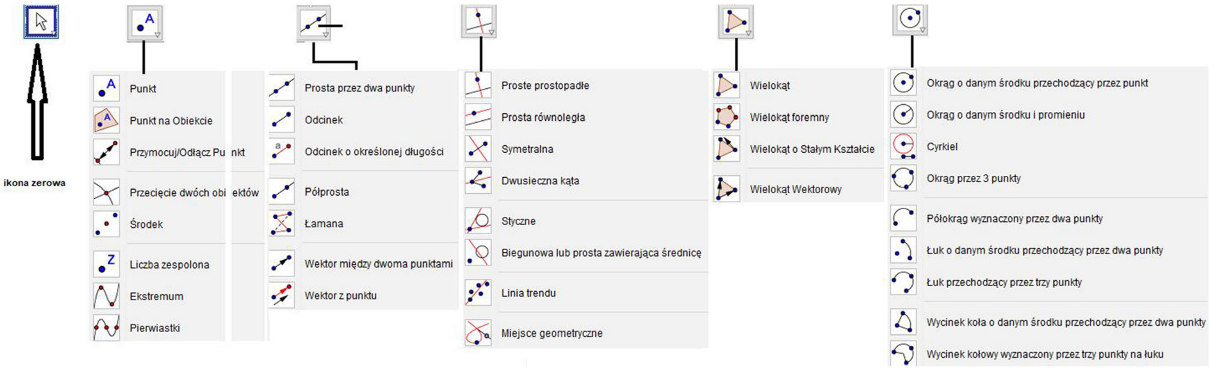
Widok Algebry, mylnie tak nazwany, nie ma nic wspólnego z algebrą, lecz pokazuje w dodatkowym oknie wszystkie obiekty, które używamy aktualnie w konstrukcji.

Widok Arkusza pozwala pracować z arkuszem kalkulacyjnym podobnie jak Excel.

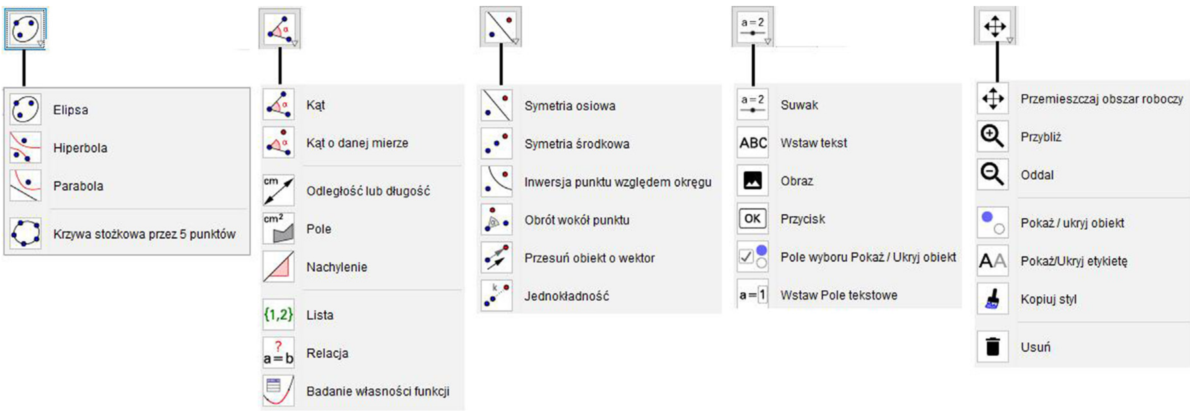
CAS uruchamia okno algebry i tam możemy działać na wyrażeniach algebraicznych, wielomianach i funkcjach wymiernych, sprowadzać do wspólnego mianownika, rozkładać na czynniki itp.



rys. 1



rys. 2



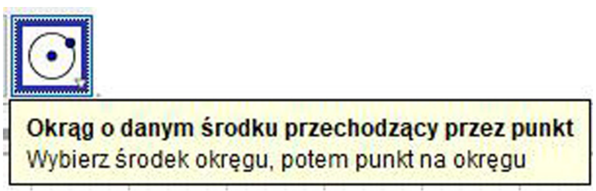
rys. 3

Widok Grafiki to główny ekran geometrii, w którym rozwiązujemy problemy planimetrii, a po wprowadzeniu układu współrzędnych możemy prezentować wykresy funkcji i badać je.

Widok Grafiki2 to drugi pomocniczy ekran geometrii.

Widok Grafiki 3D umożliwia pracę na obiektach geometrii 3D, a więc graniastosłupach, ostrosłupach, wielościanach foremnych, platońskich wybranych bryłach obrotowych dokonywać ich przekrojów i rozkładać ich siatki.

Problemy, którymi będziemy zajmować się w niniejszej publikacji, będą wymagały niewielkiej znajomości ekranu 2D i ekranu 3D.



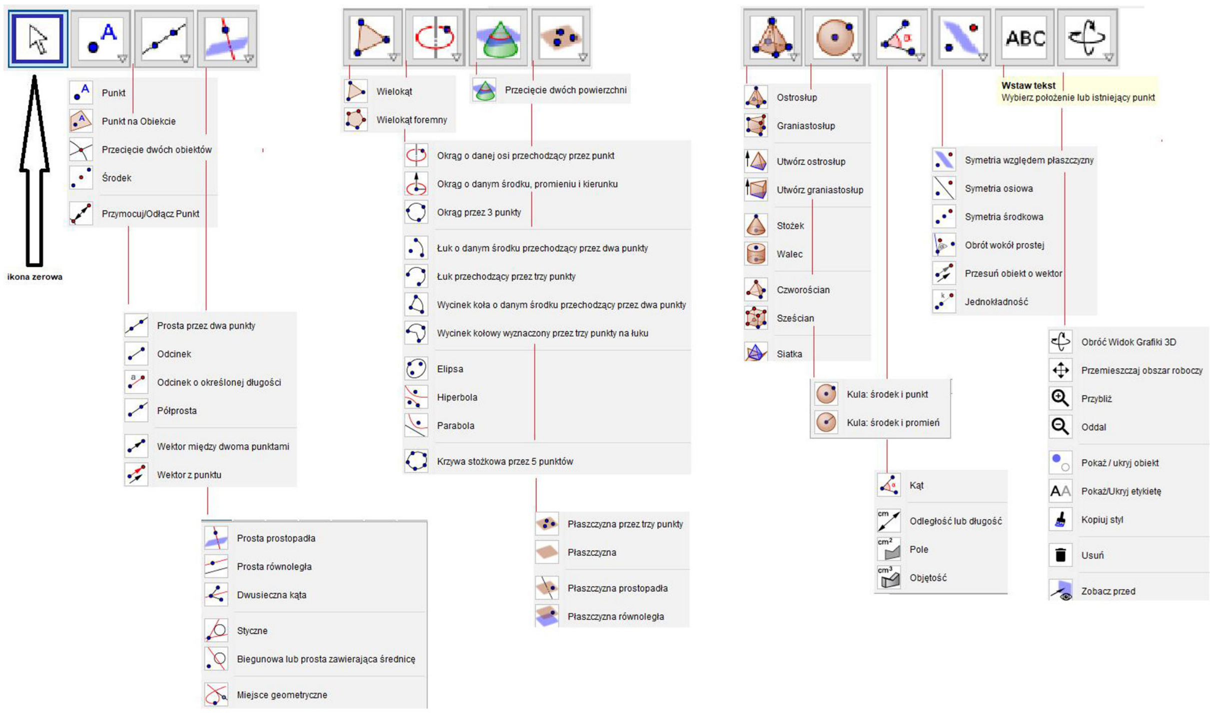
rys. 4

Na rysunku widoczne są grupy narzędzi ekranu Geometri 2D. Jest ich łącznie10. Pierwsza ikona  zwana ikoną zerową nie zawiera ważnych narzędzi. Jej uruchomienie wyłącza ostatnio używane narzędzie i powoduje przejście do trybu edycji. Można ją też uaktywnić przez wciśnięcie klawisza ***ESC***.

W trybie edycji możemy wówczas wykreślić dowolny kształt, używając ***Kształt Odręczny*** lub ***Pióro*** albo przesuwać (***Przesuń***) lub obracać (***Obrót***) utworzone obiekty.

Narzędzia najczęściej używane znajdują się w pozostałych 10 grupach (rys. 2 i rys. 3), które otwieramy, klikając w ikonę danej grupy. Ikona, która się ukazuje, wskazuje ostatnio używane narzędzie w danej grupie.

Ikona 1 zawiera 8 narzędzi typu ***Punkt***,
Ikona 2 zawiera 7 narzędzi typu ***Odcinek***, ***Prosta***.
Ikona 3 zawiera 8 narzędzi ***konstrukcyjnych*** typu liniowego,
Ikona 4 wprowadza na ekran ***wielokąty***,
Ikona 5 pozwala wywołać narzędzia ***typu kołowego***,
Ikona 6 umożliwia kreślenie ***stożkowych***,
Ikona 7 zawiera narzędzia ***mierzenia***,
Ikona 8 ukrywa pod sobą narzędzia ***przekształceń geometrycznych***,



rys. 5

Ikona 9 pozwala uruchomić **suwaki**, ***przyciski*** i wstawić ***obraz*** lub ***tekst***,

Ikona 10 – zamyka listę narzędzi – uaktywnia ***usuwanie***, ***powiększanie***, ***kopiowanie***.

Używanie narzędzi ułatwia Pomoc, która pojawia się po ustawieniu kursora myszy w pobliżu wybranego narzędzia – rys. 4

Kolejny ekran, który będziemy stosować w tej publikacji, to **Ekran Grafiki 3D**.

Jego menu jest bardzo podobne do menu 2D (rys. 5) poza narzędziami, które stosuje się wyłącznie dla obiektów trójwymiarowych. Na przykład inaczej konstruuje się tutaj okrąg – należy wskazać jego oś symetrii i punkt leżący na nim, lub środek, prostą równoległą do osi tego okręgu i długość promienia.

W niniejszej publikacji użycie danego narzędzia 2D lub 3D będzie opisane jego położeniem w danej grupie i pozycją, jaką w niej zajmuje. Na przykład wywołując narzędzie okręgu przez trzy punkty, w geometrii 2D będzie opisane jako narzędzie 5/4, a w geometrii 3D jako 5/3. To ułatwi czytelnikowi samodzielne wykonanie danej konstrukcji.

Wszystkie konstrukcje wykonane są w ten sposób, że występują w nich przyciski umożliwiające poruszanie się po konstrukcji ponumerowanymi etapami naprzód lub wstecz. To pozwala nauczycielowi przeprowadzić każdą lekcję krok po kroku, a jeśli nauczyciel udostępni taką konstrukcję uczniowi, ten może ją w domu powtórzyć w tempie dostosowanym do jego możliwości.

Taki sposób uczenia z konstrukcjami GeoGebry umożliwia nauczanie indywidualne ucznia, unikając jego stresu i niepowodzeń w uczeniu się matematyki, jednocześnie realizując zasadę odkrywczego nauczania tego przedmiotu.

Przy tytule każdej lekcji dopisany jest symbol ***SP*** lub ***LO*** oznaczający poziom nauczania w szkole podstawowej lub szkole średniej.

Z matematyką to jest tak, że albo przykłady zaczerpnięte z życia i zaobserwowane w otaczającej nas przyrodzie bierzemy pod „matematyczną lupę" i staramy się zrozumieć je i ich działanie, albo tworzymy coś w matematyce czysto teoretycznego, a potem odnajdujemy to w życiu i przyrodzie. Częściej spotykamy się z tym pierwszym przypadkiem.

Dlatego też niektóre lekcje są tak utworzone, by po poznanej teorii na kolejnej pojawił się problem wzięty z życia, w którym poznana teoria pozwala zrozumieć i rozwiązać ten życiowy problem. Uczniowie powinni dostrzegać konieczność poznawania matematyki, w której tkwi klucz do zrozumienia wielu praktycznych zjawisk. Przykładem może być wybór miejsca, z którego oglądamy obraz w muzealnej sali, który nie jest tak oczywisty i zupełnie nieprzypadkowy. Jedna z lekcji w klasie 1 liceum opisze dokładnie taką sytuację.

Wyjątkowym przykładem ilustrującym korelacje między matematyką a przyrodą jest pojęcie złotej liczby. Złoty podział, wartość złotej liczby i złoty ciąg Fibonacciego przewija się w matematyce niemal w każdym momencie jej poznawania. Temu zagadnieniu i najnowszym odkryciom dotyczącym złotej liczby będzie poświęconych kilka lekcji.

Do pracy dołączam również dwa filmy 45, które nauczyciele mogą z powodzeniem wykorzystać na lekcjach okazjonalnie, np. w Dniu Liczby PI. W zasadzie oba filmy nadają się dla uczniów ostatnich dwóch klas szkół podstawowych oraz dla licealistów.

Film „***Czworościan foremy***" można pobrać również z Internetu pod adresem:

https://www.youtube.com/watch?v=I1JFh7dKLdA

Omawia on interesujące i mało znane własności czworościanów, w szczególności foremnego w aspekcie porównywania go do trójkąta – w szczególności równobocznego.

Film „Czy widzimy czwarty wymiar" ma na celu zrozumienie idei czwartego wymiaru, który często ludzie mylą z czwartym wymiarem w sensie fizycznym, gdzie oprócz osi OX, OY i OZ mamy czwartą oś – oś czasu. Czwarty wymiar jest w tym filmie bardzo prosto i przystępnie wprowadzony w formie powtórki całej geometrii jedno-, dwu- i trójwymiarowej i intuicyjnie na ich bazie wprowadzonej czterowymiarowej. Też jest dostępny na YouTube pod adresem:

https://www.youtube.com/watch?v=1xzFuFKMIL0

Wzorcowe materiały dydaktyczne w zakresie:

MATEMATYKA

POZIOM – **SZKOŁA PODSTAWOWA**

Bronisław Pabich

SP 01 – SYMETRALNA DWÓCH PUNKTÓW

Pojęcie symetralnej stanowi bazę do poznawania kolejnych pojęć, takich jak symetria osiowa, figury symetryczne, wykresy symetryczne względem danej osi itp.

Proszę zwrócić uwagę, że tematem lekcji nie jest „symetralna odcinka", lecz symetralna dwóch punktów. Wiemy przecież, że do konstrukcji symetralnej nie jest potrzebny żaden odcinek, wystarczą tylko dwa punkty i cyrkiel.

Dawniej, gdy nie było komputerów, nie mogliśmy z uczniami mówić o symetralnej dwóch punktów. Mówiło się więc o symetralnej odcinka jako prostej prostopadłej do odcinka, przechodzącej przez jego środek. Takiej definicji uczniowie się wówczas uczyli na pamięć, nie rozumiejąc jej.

Było to tym trudniejsze do zrozumienia, gdyż symetralną wyznaczało się konstrukcyjnie cyrklem. Absolwenci szkół podstawowych, a później również gimnazjów poznawali w liceum „nową" definicją symetralnej jako zbioru punktów spełniających pewną własność. Było to więc małe nieporozumienie w nauczaniu tego zagadnienia. Dziś w dobie komputerów możemy już w szkole podstawowej tak zdefiniować symetralną jak kiedyś w liceum, czyli wprowadzać symetralną dwóch punktów, a niekoniecznie odcinka, gdyż on nie uczestniczy w konstruowaniu tej symetralnej.

To, co było niegdyś w szkole podstawowej definicją, teraz może być już twierdzeniem, które zresztą bardzo łatwo się dowodzi z uczniami szkoły podstawowej. Nie ma więc już nieporozumienia w pojęciu tego samego zagadnienia.

Celem tej lekcji jest zdefiniowanie w szkole podstawowej symetralnej jako ***zbioru punktów równooddalonych od dwóch ustalonych punktów***.

Tak wprowadzone pojęcie jest bardziej naturalne, bo zgodne z jej konstrukcją. Uczniowie wykonują tę symetralną w sposób konstruktywistyczny i równocześnie poznają własności konstruowanych cyrklem punktów.

Przebieg lekcji:

- dane są dwa punkty ***A*** i ***B***.
- wskaż co najmniej dwa punkty, których odległości od punktów ***A*** i ***B*** są takie same.

Uczniowie wskazują najczęściej jeden punkt – środek między punktami ***A*** i ***B***. Mają trudność z odnalezieniem innego takiego punktu.

Pytamy ich, czy to jedyny punkt jednakowo odległy od ***A*** i ***B***. Po chwili uczniowie wskazują w przybliżeniu prawdopodobne położenie drugiego punktu. Pytamy, jak go skonstruować metodami klasycznymi, czyli cyrklem i linijką. Często zdarza się, że uczniowie w tym momencie nie wiedzą, jak postąpić dalej.

Ucząc konstrukcji, powinniśmy uświadomić uczniów, że ***punkt jest tworzony na płaszczyźnie w sposób umowny*** – np. jest kreślony ołówkiem albo powstaje jako przecięcie się dwóch prostych, odcinków, okręgów lub ich łuków.

Bardzo dobrze to widać w programach komputerowych, gdzie widzimy wzrokowo punkty przecięcia się okręgów, ale komputer ich nie widzi.

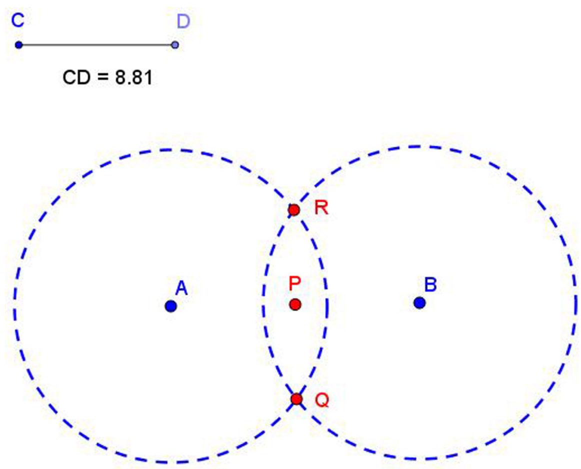
Dopiero wybór narzędzia ***Przecięcie dwóch obiektów*** (w GeoGebrze ***1/4***) pozwala po wskazaniu tych okręgów utworzyć punkty ich przecięcia. Takie postępowanie przybliża uczniom prawidłowe ich myślenie.

Włączamy przygotowany plik GeoGebry ***SP01 symetralna.ggb***, który poprowadzi nas przez dalsze etapy lekcji. Oto kontynuacja tej lekcji:

- Już wiemy, że punkt ***P*** (środek między ***A*** i ***B***) spełnia warunki zadania.
- Jaka jest jego odległość od obu tych punktów?
- Mierzymy ją, korzystając z narzędzia ***7/3*** – uczniowie odczytują tę odległość.
- Czy potrafimy znaleźć inny punkt ***R***, który jest odległy od ***A*** i ***B*** więcej niż odległość $|AP|=|BP|$?
- Niech przykładowo $|AP| = 4$ cm.
- Znajdźmy punkt ***R*** odległy od punktów ***A*** i ***B*** więcej niż 4 cm – np. 10 cm.
- Gdzie leżą wszystkie punkty odległe od punktu ***A*** o 10 cm?
- Jaką figurę tworzą?

Uczniowie powinni wiedzieć, że punkty odległe od punktu ***A*** o 10 cm leżą na okręgu o środku ***A*** i promieniu długości 10. Jest to okazja przypomnienia pojęcia okręgu jako zbioru punktów spełniających określoną własność. Na tej zasadzie uczniowie kreślili w młodszych klasach cyrklem okrąg. Podobnie punkty odległe od punktu ***B*** o 10 cm leżą na okręgu o środku ***B*** i promieniu długości 10.

- Skonstruujmy w GeoGebrze te dwa okręgi.
- Utworzymy najpierw odcinek ***CD*** o długości 10 cm – najlepiej odmierzmy go na wykreślonej półprostej od punktu ***C***.
- Odcinek ten będzie promieniem konstruowanych okręgów.
- Wykreślimy okrąg narzędziem ***Cyrkiel*** (***5/3***), wskazując odcinek ***CD***, a następnie punkt ***A***.
- Podobnie powtórzymy to z punktem ***B***.
- Gdzie znajduje się punkt ***R*** równoodległy od ***A*** i ***B***?



rys. 1

W tym momencie uczniowie powinni wskazać jeden z dwóch wspólnych punktów obu okręgów. Wprawdzie uczniowie nie znają logicznego pojęcia koniukcji dwóch zdań, ale intuicja podpowiada im, że muszą to być punkty, które leżą na jednym i drugim okręgu równocześnie.

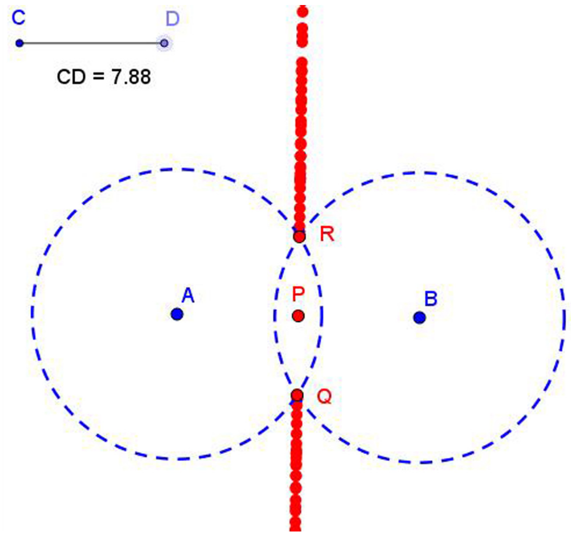
- Czy to jedyny punkt uzyskany tym sposobem?
- Jeśli znajdziemy drugi, oznaczmy go jako ***Q***.
- Poruszajmy punktem ***D*** na półprostej, zmieniając tym samym długość promienia obu okręgów.
- Co dostrzegamy?
- Włączmy ślad punktów ***R*** i ***Q***, klikając prawym przyciskiem myszy w punkty ***R*** i ***Q*** i wybierając z menu kontekstowego narzędzie ***Ślad*** – rys.2.
- Jaką krzywą wykreślają ślady punktów ***R*** i ***Q***?
- Czy w trakcie zmiany promienia obu okręgów zawsze istnieją punkty ***R*** i ***Q***, czy czasem oba znikają? Kiedy?

Po tym pytaniu uczniowie powinni odkryć warunek przecinania się obu okręgów w dwóch punktach: Odległość ***AB*** musi być mniejsza niż dwukrotna długość promienia obu okręgów.

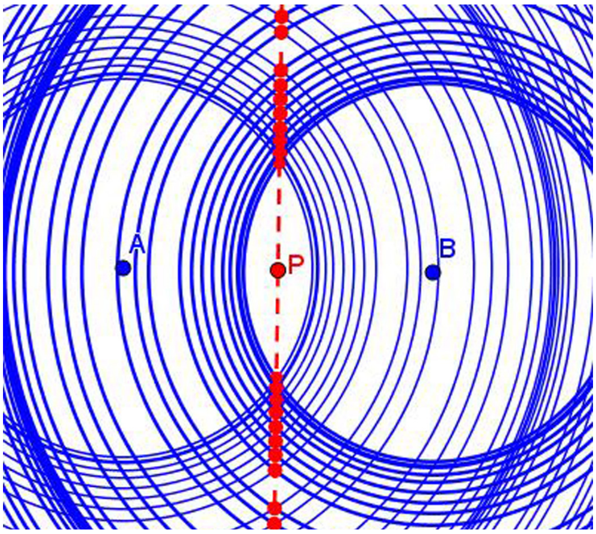
Uzupełnij zapis:

Punkty **Q** *i* **R** *istnieją tylko wtedy, gdy* ………………………..

W tym momencie warto pokazać uczniom cały ciąg okręgów, które przecinają się w punktach leżących na jednej prostej. Uaktywnijmy opcją ***Ślad*** dwa okręgi o środkach ***A*** i ***B***. Poruszajmy ponownie punktem ***D***, zmieniając równe długości ich promieni. Co otrzymamy na ekranie GeoGebry – rys. 3?

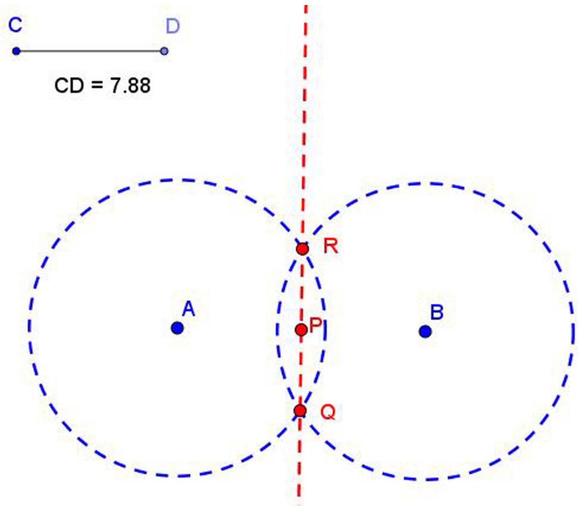


rys. 2



rys. 3

Odświeżmy przez wciśnięcie ***CTRL+F*** ślady punktów ***R*** i ***Q***.
Wybierzmy z menu narzędzie o nazwie ***Symetralna*** (***3/3***) i wskażmy punkty ***Q*** i ***R***.
Czym jest tak utworzona symetralna?



rys. 4

Uczniowie z łatwością powinni zauważyć, że symetralna pokrywa się ze śladem, jaki pozostawiają punkty ***R*** i ***Q*** w trakcie zwiększania długości promieni ***|CD|*** okręgów o środkach ***A*** i ***B***.

- Uzupełnijmy zapis:
  Symetralna dwóch punktów **A** *i* **B** *jest zbiorem wszystkich punktów, które*
  ....

W ten sposób uczniowie poznają ***pojęcie symetralnej dwóch punktów jako zbiór punktów jednakowo odległych od tych punktów***. Pojawia się więc oczekiwana definicja symetralnej.

Teraz czas na konstrukcję symetralnej dwóch punktów bez komputera z użyciem prawdziwego cyrkla na szkolnej tablicy i powtórzenie jej w zeszytach uczniów.

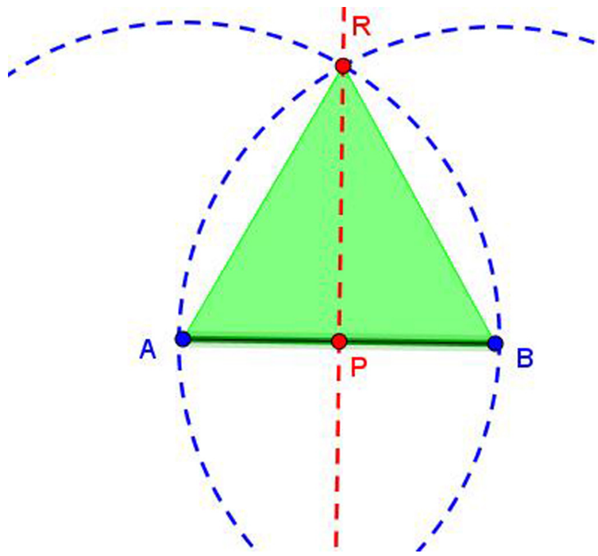
- Chcemy skonstruować cyrklem symetralną dwóch dowolnych punktów ***K*** i ***L***, czyli prostą utworzona przez punkty o znanych nam już własnościach…..
- Co potrzebujemy, by tę prostą wyznaczyć?

Uczniowie wiedzą, że prostą wyznaczają jednoznacznie dwa różne punkty. Skąd je wziąć?

- Prosta ta jako symetralna wyznaczona jest przez dwa punkty jednakowo oddalone od punktów ***K*** i ***L***.
- Wystarczy więc skonstruować tylko dwa takie punkty …. to już potrafimy zrobić … wykreślamy prostą przez te punkty.
- Symetralna jest już skonstruowana.

Kolejnym etapem lekcji jest odkrycie pewnej hipotezy i udowodnienie jej.

- Weźmy pod uwagę punkty ***A*** i ***B*** i dowolny punkt ***R*** leżący na symetralnej ***A*** i ***B***.
- Utwórzmy trójkąt ***ABR***.
- Jakim trójkątem jest trójkąt ***ABR***? (odpowiedź uczniów: równoramiennym)
- Dlaczego? (odp.: bo **|*AR*| - |*BR*|*)***
- W takim trójkącie środek jego podstawy (tutaj punkt ***P***) jest środkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka ***R***.



rys. 5

- Wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka ***R*** jest symetralna punktów ***A*** i ***B***.
- Jak ta symetralna jest więc położona względem odcinka ***AB***?
- Uzupełnijmy poniższy zapis:
  *Symetralna dwóch punktów **A** i **B** przechodzi przez środek …………….*
  i jest prostopadła do ………………………………

Podsumowując lekcję, uczniowie poznali jedną definicję i jedno twierdzenie:

Definicja

Symetralna dwóch punktów A i B jest zbiorem punktów jednakowo odległych od tych punktów.

Twierdzenie

Symetralna dwóch punktów jest prostą przecinającą odcinek łączący te punkty pod kątem 90^0 i przechodzi przez środek tego odcinka.

SP 02 – ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ, KRZYWA POGONI

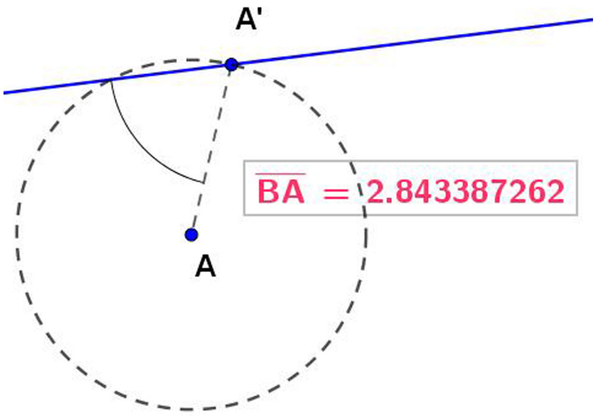
Wprawdzie uczniowie rozumieją lub czują intuicyjnie, co to jest odległość punktu od prostej. Pojęcie to czują w przyrodzie również intuicyjnie zwierzęta drapieżne. Gdy atakujące zwierzę goni swoją ofiarę, to goni ją w ten sposób, że szuka najkrótszej odległości od ofiary.

Podobnie rzecz się ma w matematyce – odległość punktu ***P*** od prostej ***k*** to długość najkrótszego odcinka łączącego ten punkt z punktem ***A'*** na prostej ***k***. Ale jak znaleźć dla danej prostej i punktu ***A*** jego odległość od tej prostej?

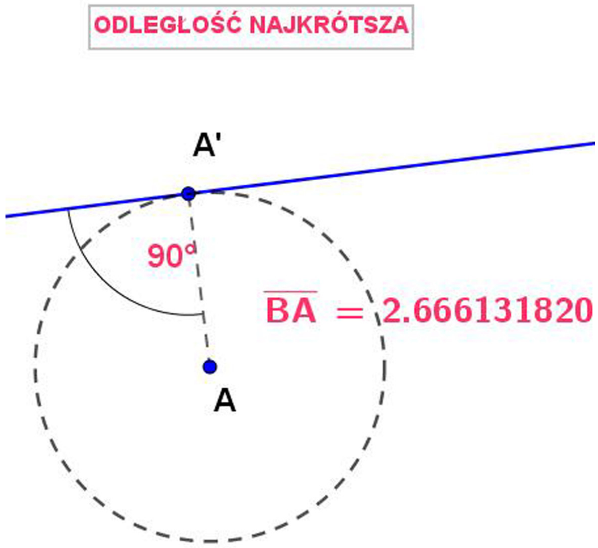
Wykonajmy doświadczenie. Otwórzmy plik o nazwie ***SP02 odl_pkt_prosta_1***.

Na ekranie widzimy ustalony punkt ***A*** nie leżący na prostej ***k*** i punkt ***A'***, który przesuwa się po tej prostej. Program odczytuje odległość **|*AA'*|** i informuje nas, w którym momencie ta odległość jest najmniejsza.

Widzimy również okrąg o środku ***A*** i promieniu ***AA'*** i kąt, jaki tworzy odcinek ***AA'*** z prostą ***k***.



rys. 6



rys. 7

Widzimy w trakcie doświadczenia, że odległość punktu ***A*** od prostej jest najmniejsza, gdy odcinek ***AA'*** jest prostopadły do tej prostej (rys. 7), wykreślony okrąg jest styczny do tej prostej.

Zatem odkryliśmy definicję:

Odległość punktu A od prostej jest to długość odcinka AA' prostopadłego do tej prostej, gdzie A' leży na prostej.

Matematycy mówią, że punkt ***A' jest rzutem prostokątnym punktu A*** na tę prostą. Pojęcie to będzie potrzebne przy poszukiwaniu rzutów płaskich figur geometrycznych na prostą, a w poznawaniu stereometrii brył przestrzennych na płaszczyznę.

Jak praktycznie znaleźć odległość punktu ***A*** od prostej, czyli jak skonstruować cyrklem i linijką punkt ***A'***?

Ponieważ odcinek ***AA'*** jest prostopadły do prostej, więc konstrukcja sprowadza się do utworzenia prostej prostopadłej do prostej wystawionej z punktu ***A***. Robimy to oczywiście za pomocą cyrkla.

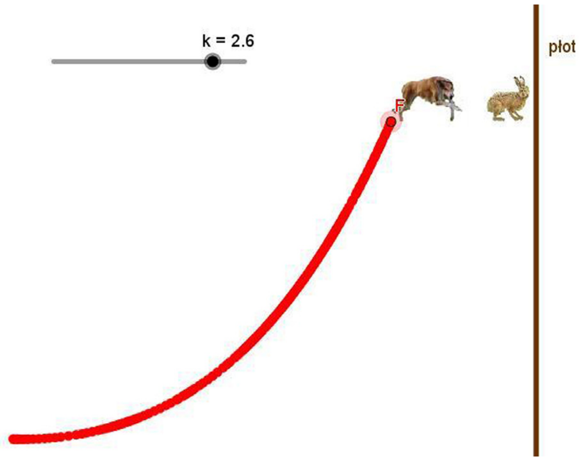
Wykreślamy taki okrąg o środku ***A***, który przetnie prostą w dwóch punktach, np. ***K*** i ***L***. Punkty te są równoodległe od punktu ***A***, więc poszukiwana prosta jest symetralną tych dwóch punktów. Konstruujemy ją w sposób znany z poprzedniej lekcji.

Konstrukcję tę można obejrzeć na ekranie GeoGebry w pliku o nazwie ***SP02 odl_pkt_prosta_2.***

Punkt A' przecięcia tej symetralnej z daną prostą jest poszukiwanym punktem ***A'***.

Zainteresowanym uczniom warto pokazać, jak powstaje i co to jest ***krzywa pogoni***.

Wyobraźmy sobie, że pies znajdujący się w odpowiedniej odległości od płotu dostrzega zająca, który kica pod płotem. Rzecz przydarzyła się zimą, więc wszystko odbywa się na śniegu. Pies zrywa się, by złapać zająca, ale zając zaczyna przed nim uciekać wzdłuż płotu. Jaki tor na śniegu wykreśli pies goniący zająca według zasady, która działa w przyrodzie: *atakujący w każdym momencie gonitwy biegnie po najkrótszej drodze do ofiary.*



rys. 8

Nasuwa się dodatkowe pytanie, czy pies dogoni zająca i od czego to zależy?

W doświadczeniu wykonanym w programie GeoGebra (należy uruchomić plik ***SP02 odl_pkt_prosta_3***) można zmieniać stosunek prędkości zająca względem psa i zbadać, jaki kształt przybiera krzywa pogoni i kiedy pies szybciej dogoni zająca. Wszystko też zależy od tego, jak daleko jest oddalony pies o płotu.

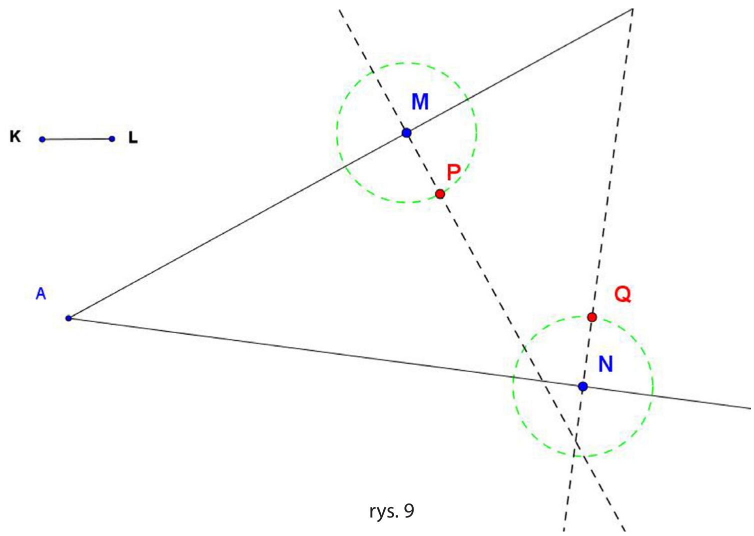
SP 03 – DWUSIECZNA KĄTA

Dwusieczna kąta, jak sama nazwa mówi, dzieli go ma dwa równe kąty. Każdy z nich ma miarę stanowiącą połowę miary danego kąta. Konstrukcja dwusiecznej pozwala też zdefiniować ją podobnie jak symetralna dwóch punktów jako miejsce geometryczne punktów spełniających pewną własność.

Trudność w nauczaniu tego tematu polega na tym, że uczeń przed przystąpieniem do konstrukcji dwusiecznej powinien znać pojęcie odległości punktu od prostej. Poprzednia lekcja go do tego już przygotowała.

Podobnie jak w przypadku wprowadzania pojęcia symetralnych dwóch punktów, gdzie poszukiwaliśmy punktów równooddalonych od tych punktów, teraz będziemy z uczniami poszukiwać punktów równooddalonych od dwóch prostych, w których zawierają się ramiona kąta. I tu właśnie potrzebne jest pojęcie odległości punktu od prostej.

Lekcję rozpocznijmy od konstrukcji GeoGebry lub tej samej konstrukcji na tablicy. W pewnym momencie i tak będziemy zmuszeni eksperymentować w programie dynamicznym GeoGebry, by dostrzec odpowiednie własności.

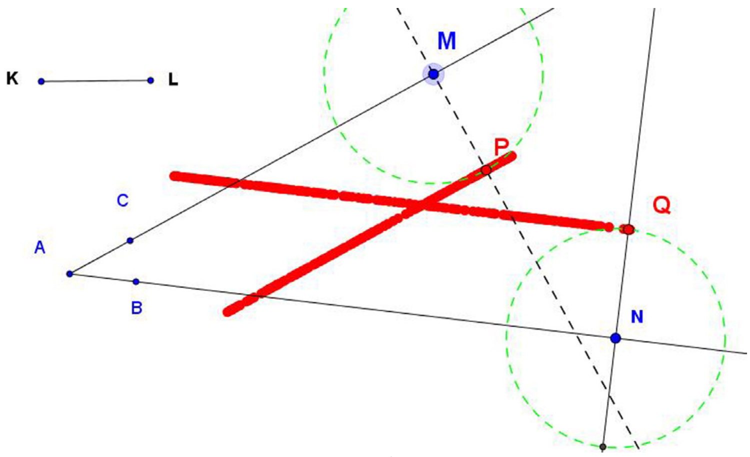


rys. 9

Otwórzmy konstrukcję ***SP 03 dwusieczna1.ggb***

Moja propozycja to poprzedzenie lekcji konstrukcją punktów równoodległych od danej prostej. Niech tą odległością będzie długość ustalonego odcinka ***a***. Oto przebieg lekcji z użyciem GeoGebry:

- Wiemy już, co to jest odległość punktu od prostej, więc wykorzystajmy tę wiedzę do znalezienia przynajmniej jednego punktu tak oddalonego od prostej, w której leży jedno ramię kąta, jak od drugiej prostej, zawierającej drugie ramię kąta.
- Ustalmy tę odległość jako długość pewnego ustalonego odcinka. Niech to będzie odcinek ***KL***.
- Skonstruujmy okrąg o środku w punkcie ***M*** i promieniu długości |***KL***|. Wykorzystamy w tym celu narzędzie Cyrkiel (5/3).
- Punkt ***P*** przecięcia tego okręgu z wykreśloną prostopadłą wyznacza ten, który od ramienia ***AC*** jest odległy o ***KL***.
- Co wykreśla punkt *P*, gdy poruszamy punktem ***M*** po ramieniu kąta? Włączmy w tym celu jego ślad.
- Podobnie skonstruujmy na drugim ramieniu punkt ***N***, prostą prostopadłą do tego ramienia, okrąg o środku ***N*** i promieniu |***KL***| i wreszcie punkt ***Q*** przecięcia tego okręgu z tą prostopadłą.
- Co wykreśla punkt ***Q***, gdy poruszamy punktem ***N*** po ramieniu kąta?



rys. 10

Obserwując wykonywane doświadczenie, dostrzegamy, że punkt ***P*** oraz ***Q*** wykreślają proste równoległe do ramion kąta odległe od nich o ustaloną długość |***KL***|.

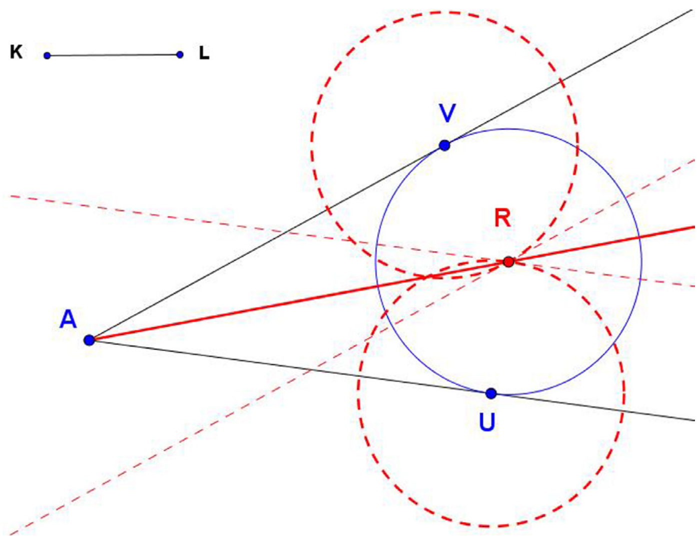
Możemy je teraz skonstruować, wykorzystując program GeoGebra (narzędzie

- Ślady obu punktów ***P*** i ***Q*** wykreśliły dwie proste, każda równoległa do odpowiedniego ramienia kąta.
- Wyłączmy więc ślad punktów ***P*** i ***Q*** i poprowadźmy te proste.
- Czy widać już taki punkt, który jest odległy o |***KL***| od ramienia ***AB*** i ramienia ***AC*** tego kąta?
- Jak go znaleźć?
- Widać, że poszukiwanym punktem jest punkt ***R*** wspólny dla obu prostych.
- Czy to jedyny punkt?”
- Zauważmy, że jego odległość od ramion kąta jest równa |***KL***|. Spróbujmy dostrzec, co stanie się, jeśli tę odległość zmniejszymy lub zwiększymy?
- Chwyćmy myszą za punkt ***L*** i oddalajmy go lub przybliżajmy do punktu ***K***.
- Co się dzieje wówczas z punktem ***R***?
- Jaki ślad zakreśla ten punkt?
- Ślad punktu ***R*** to zbiór punktów równooddalonych od ramion kąta ***BAC***. Nie da się ukryć, że punkt ***R*** kreśli nam poszukiwaną dwusieczną kąta ***BAC***.
- Zauważmy, że przechodzi ona przez wierzchołek kąta, co jest oczywiste, gdyż punkt ten jest odległy od ramion kąta o tę samą odległość |***KL***| = 0.
- Czy już wiemy, jak sporządzić konstrukcję dwusiecznej kąta?
- Niestety tego jeszcze nie wiemy, choć widzimy jak ona wygląda i jaką ma własność.

Konstrukcje dwusiecznej poznamy w kolejnym pliku ***SP03 dwusieczna2.ggb***

- Już wiemy, że dwusieczna kąta to zbiór punktów równooddalonych od ramion tego kąta. Spróbujmy teraz w prosty sposób skonstruować tę dwusieczną.

- Zauważmy, że zmiana długości |***KL***| powoduje ruch punktu ***R*** po dwusiecznej. Ale za każdym razem odległość |*KL*| jest odległością punktu ***R*** od ramion kąta. Zatem wykreślmy okrąg o środku w ***R*** i promieniu ***KL***.
- Okrąg ten styka się z ramionami kąta w dwóch punktach ***U***, ***V***. Oczywiście |***RU***| = |***RV***|.
- To oznacza, że jeśli wykreślimy dwa okręgi o środkach w punktach ***U*** i ***V*** i promieniu |***KL***|, wówczas przetną się one w punkcie ***R***. Zatem niebieski okrąg o środku ***R*** jest już nam niepotrzebny.
- To podpowiada nam konstrukcję dwusiecznej kąta: należy skonstruować dwa okręgi o takim samym promieniu.
- Ale gdzie są środki tych okręgów?



rys. 11

- Zauważmy, że skoro każdy punkt ***R*** jest tak samo odległy od ***U*** i ***V***, to leży na symetralnej tych punktów.
- Jakimi punktami są punkty ***U*** i ***V***?
- Punkty ***U*** i ***V*** są jednakowo odległe od wierzchołka kąta.
- To jest kluczem do konstrukcji dwusiecznej:
- Obieramy dwa punkty na ramionach kąta, np. kreśląc dowolny okrąg o środku ***A***.
- Niech ***G*** i ***H*** są punktami przecięcia tego okręgu z ramionami kąta.
- Teraz wystarczy skonstruować symetralną punktów ***G*** i ***H***.
- Symetralna punktów ***G*** i ***H*** to poszukiwana dwusieczna kąta.

Odkryliśmy więc, że

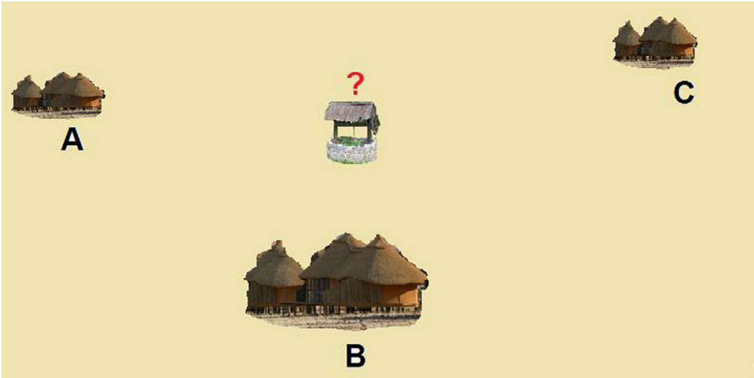
Dwusieczna kąta jest symetralną dwóch punktów leżących na ramionach kąta równoodległych od wierzchołka kąta.

Dobrze byłoby, gdyby uczniowie samodzielnie powtórzyli tę konstrukcję w swoich zeszytach.

SP 04 – STUDNIA NA PUSTYNI

Wykorzystajmy w tej lekcji plik ***SP 04 studnia.ggb***.

Trzy plemiona afrykańskie postanowiły wykopać studnię artezyjską na pustyni w takim miejscu, aby mieszkańcy ich wiosek ***A***, ***B*** i ***C*** mieli taką samą odległość do tej studni.



rys. 12

George Poly'a – wybitny dydaktyk pochodzenia węgierskiego opublikował w swoich dwóch książkach „***Odkrycie matematyczne***" oraz „***Jak to rozwiązać***" zasady poszukiwania heurystyk w rozwiązywaniu rozmaitych zadań z matematyki. Jedna z nich głosi, że jeśli założenia zadania przeszkadzają nam w poszukiwaniu rozwiązania zadania, to należy obniżyć założenia w tym zadaniu, albo z niektórych zrezygnować. To pozwoli rozwiązać zadanie w jakiejś uproszczonej sytuacji, da pomysł na odkrycie rozwiązanie samego zadania.

Nasze zadanie jest dobrym przykładem zastosowania tej zasady Poly.

Możemy ukryć jedną z wiosek (np. ***C***) przyjmując, że chcemy wykopać studnię w takim miejscu, by mieszkańcy wiosek ***A*** i ***B*** mieli tę samą odległość do studni.

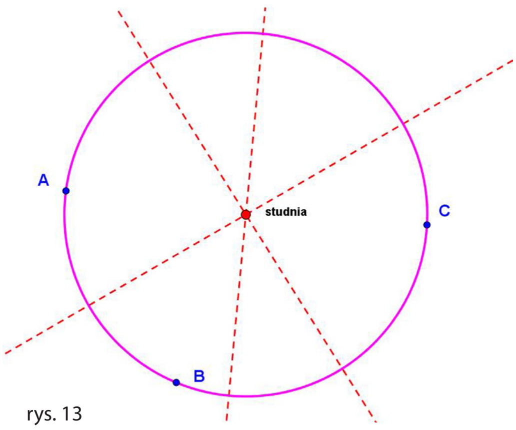
Ilekroć napotykamy w geometrii sformułowanie „***taką samą odległość***", powinna nam na myśl przyjść definicja symetralnej dwóch punktów. Wykorzystajmy ją tutaj.

Skonstruowanie symetralnej punktów ***A*** i ***B*** wskazuje, gdzie ta studnia mogłaby się znaleźć. Można ją wykopać w dowolnym miejscu tej symetralnej. Ale ma być ona tak samo odległa od wioski ***C***. Wystarczy więc dorysować symetralną innej pary punktów, np. ***A*** i ***C*** lub ***B*** i ***C***. Poszukiwane położenie studni jest oczywiście punktem przecięcia jednej z par tych symetralnych. Niech ten punkt nazywa się ***S***.

Z dotychczasowej wiedzy uczniowie wnioskują, że $|SA| = |SB| = |SC|$. To zaś oznacza, że punkt ***S*** może być środkiem okręgu, który przechodzi przez wioski ***A***, ***B*** i ***C***.

Zadanie to specjalnie dedykuję uczniom szkoły podstawowej, gdyż ukazuje ono, jak matematyka jest powiązana z życiowymi sytuacjami i nieraz konieczność jej znajomości pozwala takie sytuacje rozwiązać.

Gdyby utworzyć trójkąt ***ABC***, zadanie nie miałoby już takiego smaku. Ale zbliża ono uczniów do pojęcia okręgu opisanego na trójkącie. ***Środek okręgu opisanego na trójkącie znajduje się w przecięciu symetralnych jego boków (albo par wierzchołków)***. Promieniem tego okręgu jest oczywiście odległość tego środka od dowolnego wierzchołka trójkąta.



rys. 13

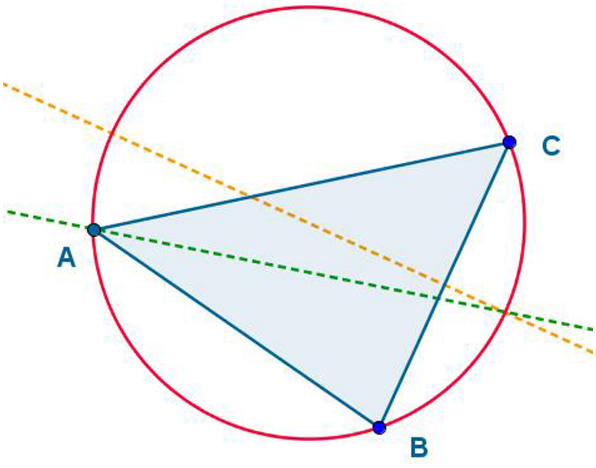
SP 05 – SYMETRALNE I DWUSIECZNE TRÓJKĄTA

Warto w trakcie podsumowania pojęć symetralnej i dwusiecznej wykonać pewną konstrukcję, w której pojawią się one równocześnie: ***SP05 dwusym.ggb***

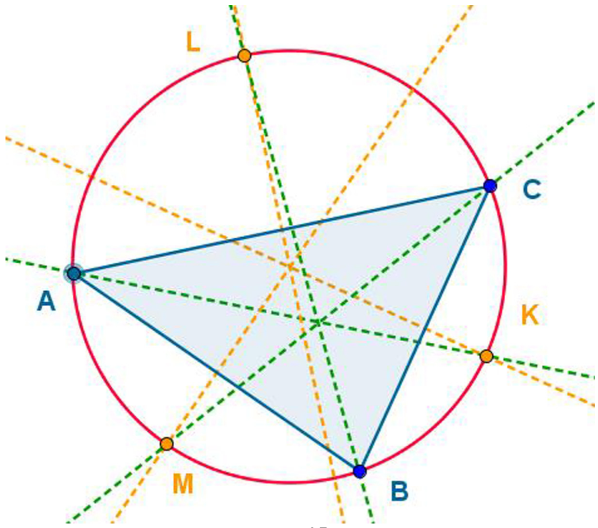
Umożliwia nam to program GeoGebra, w którym narzędzia 3/3, 3/4 pozwalają wykreślić je „od ręki".

W trakcie poruszania wierzchołkami trójkąta można dostrzec coś, co jest niezauważalne na statycznym rysunku wykonanym na tablicy. Wykonajmy następujące czynności.

- Wykreślmy trójkąt ***ABC***.
- Wykreślmy symetralną boku ***BC*** i dwusieczną kąta ***BAC*** leżącego naprzeciw tego boku.
- Wykreślmy okrąg opisany na trójkącie ***ABC***.
- Czy coś szczególnego można dostrzec w całej tej konstrukcji?
- Poruszajmy wierzchołkami trójkąta i szukajmy czegoś, co zawsze widać niezależnie od rodzaju trójkąta
- Jeśli nadal nie zauważymy nic szczególnego, to zwróćmy uwagę na punkt przecięcia się symetralnej z dwusieczną (rys. 12).
- Czy jego położenie jest przypadkowe?
- Niech ***K*** będzie punktem przecięcia się dwusiecznej i symetralnej. Łatwo zauważyć, że leży on zawsze na okręgu opisanym.



rys. 14



rys. 15

- Czy tak się dzieje również z pozostałymi symetralnymi i dwusiecznymi?
- Sprawdźmy.
- Utwórzmy pozostałe dwusieczne i symetralne.
- Jak widać, też przecinają się w punktach na okręgu opisanym w punktach ***L*** i ***M*** (rys. 13).

Twierdzenie

Symetralna każdego z boków trójkąta przecina się z dwusieczną kąta leżącego naprzeciw tego boku w punkcie na okręgu opisanym na tym trójkącie.

Wykażmy prawdziwość tej tezy dla boku ***BC*** i kąta ***CAB*** (patrz rys. 13).

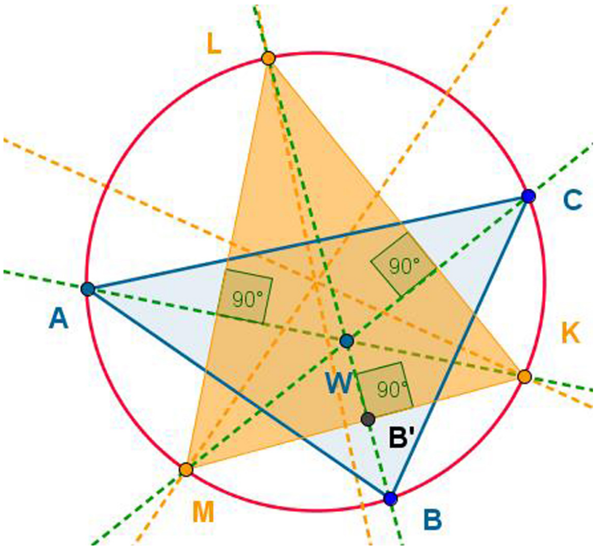
Jeżeli ***AK*** jest dwusieczną kąta ***CAB,*** to łuki ***CK*** i ***BK*** są przystające. Istnieje więc izometria przekształcająca jeden z tych łuków na drugi. Ponieważ łuki te należą do tego samego okręgu, więc izometrią tą jest symetria osiowa o osi będącej symetralną cięciwy ***CB***, a zatem symetralną boku ***BC*** trójkąta. Ta przecina okrąg w punkcie wspólnym dla obu łuków, czyli w punkcie ***K***.

Spróbujmy odkryć jeszcze coś ciekawego. Zaprezentowany materiał nadaje się dla uczniów szczególnie uzdolnionych lub dla uczniów szkoły średniej.

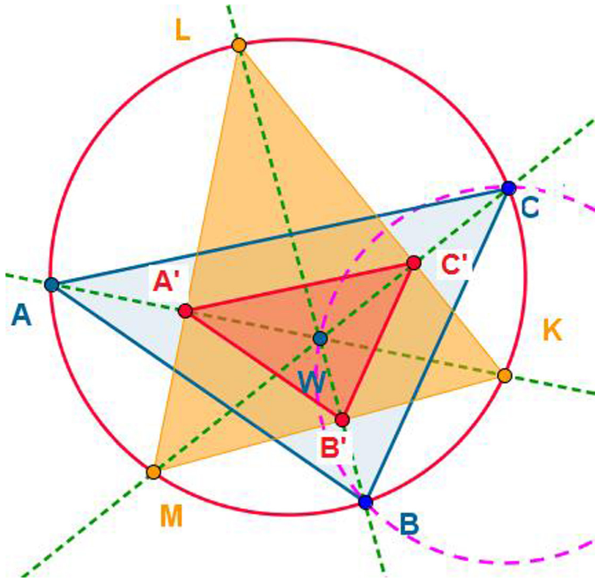
- Przypatrzmy się uważnie trójkątowi ***KLM***.
- Poruszając wierzchołkami ***A***, ***B*** i **C**, nie widzimy nic szczególnego w zachowaniu się trójkąta ***KLM***.
- Jednak jest coś, co zaczyna nas interesować.
- Przypatrzmy się uważnie dwusiecznym i symetralnym trójkąta ***ABC*** i zaobserwujmy, czym są jedne z nich dla trójkąta ***KLM***?
- Poruszajmy w tym celu wierzchołkami trójkąta ***ABC***.
- Po dłuższej chwili zauważmy, że dwusieczne w trójkącie ***ABC*** są wysokościami trójkąta ***KLM*** – rys. 14.

Twierdzenie

Dwusieczne kątów dowolnego trójkąta są wysokościami trójkąta, którego wierzchołki są punktami przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta z symetralnymi boków im przeciwległych.



rys. 16



rys. 17

- Spodki wysokości w trójkącie ***KLM*** tworzą pewien trójkąt ***A'B'C'***, będący trójkątem spodkowym dla trójkąta ***KLM*** – rys. 15.
- Ale popatrzmy, jak się ma ten trójkąt do trójkąta bazowego ***ABC***?
- Jego boki są równoległe do boków trójkąta ***ABC***, a ponadto wydaje się, że ich długości stanowią połowę długości boków trójkąta ***ABC***.
- Zmierzmy bok ***AC*** i ***A'C'*** i podzielmy te wielkości.
- Oznacza to, że trójkąt ***ABC*** jest obrazem trójkąta ***A'B'C'*** w skali $s=2$
- Fakt, że $|AC| = 2\cdot|A'C'|$, $|AB| = 2\cdot|A'B'|$ i $|BC| = 2\cdot|B'C'|$ oznacza, że można w trójkącie ***ABC*** utworzyć trzy równoległoboki.
- Natomiast wierzchołki trójkąta ***A'B'C'*** są środkami odcinków ***WA***, ***WB*** i ***WC***.

Aby tego dowieść, zauważmy, że $|\angle AWB| = |\angle WKB'| + |\angle WB'K|$
gdzie ***W*** jest punktem przecięcia się dwusiecznych, a ***B'*** punktem przecięcia boku ***MK*** z dwusieczną ***BL***.

Równość ta zachodzi na podstawie twierdzenia o równości miary kąta przyległego do danego i sumy miar dwóch pozostałych kątów w trójkącie *WB"A'*.

Stąd $|\angle WLK| = |\angle AWB| - |\angle WKB'|$.
Ponieważ $|\angle AWB| = 180^0 - (|\angle WAB| + |\angle WBA|$,
więc: $|\angle WLA'| = 180^0 - |\angle WAB| - |\angle WBA| - |\angle AKM|$,
ale $|\angle WAB| + |\angle WBA| + |\angle AKM| = \frac{1}{2}(|\angle A| + |\angle B| + |\angle C|) = 90^0$,
Wobec tego $|\angle WB'A'| = 180^0 - 90^0 = 90^0$.

Spodki ***A′***, ***B′***, ***C′*** wysokości trójkąta ***KLM*** tworzą wierzchołki kolejnego trójkąta, który nosi nazwę trójkąta spodkowego dla trójkąta ***KLM***. Jego boki są równoległe do boków trójkąta bazowego ***ABC***, co oznacza, że jest on z nim jednokładny. Środek jednokładności jest oczywiście punktem przecięcia się dwusiecznych trójkąta ***ABC****,* czyli ortocentrum trójkąta ***KLM***.

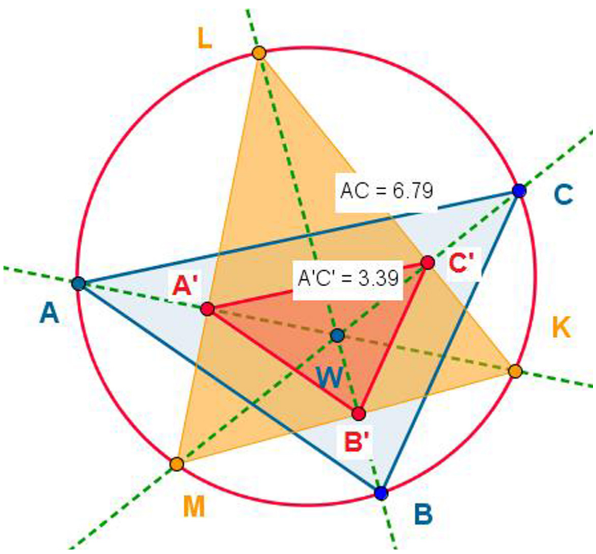
Po zmierzeniu odcinków ***AC*** i ***A′C′*** okazuje się, że skala tej jednokładności wynosi ½ – rys. 16. Mamy więc kolejne twierdzenie:

Twierdzenie

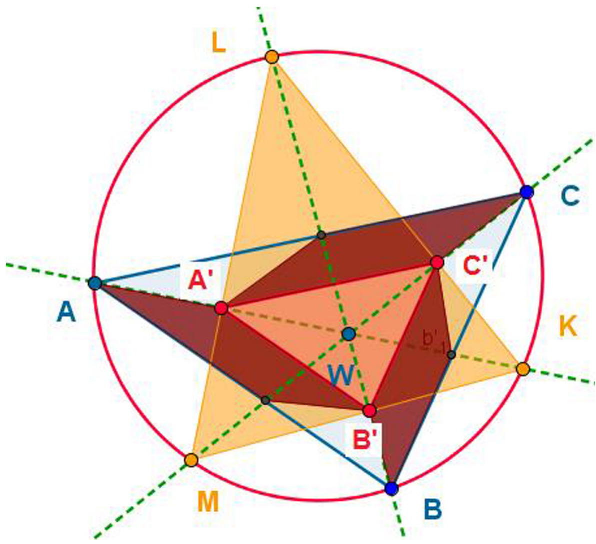
Trójkąt spodkowy trójkąta „X" utworzonego dla trójkąta bazowego jest jednokładny z trójkątem bazowym w skali 1/2.

Aby udowodnić ten fakt, poprowadźmy dodatkowo okrąg ***o(A′,A′B)***. Okrąg ten przechodzi jeszcze przez punkt ***C***, gdyż jego środek leży na symetralnej odcinka ***CB*** – rys. 17.

Dość nieoczekiwany jest natomiast fakt, że okrąg ten przechodzi również przez punkt ***W***. Punkt ten to ortocentrum trójkąta ***KLM***. Okazuje się, że obrazem ortocentrum w symetrii osiowej o osi zawierającej bok trójkąta jest zawsze punkt okręgu opisanego na tym trójkącie. Ponieważ okrąg opisany na trójkącie ***KLM*** przecina prostą ***LW*** w punkcie ***B***, więc punkt ***B*** jest obrazem ortocentrum ***W*** w symetrii osiowej o osi ***MK***.



rys. 18



rys. 19

Oznacza to, że |***WB′***| = |***B′B***| (czyli ***B′*** jest środkiem odcinka ***WB***) skąd wynika, że trójkąt ***WBK*** jest równoramienny, czyli |***WK***| = |***WB***|, a to oznacza, że okrąg ***o(K, KB)*** przechodzi przez punkt ***W***.

Analogicznie można wykazać, że ***C′*** jest środkiem odcinka ***WC***. Dlatego też odcinek ***B′C′*** jest równoległy do boku ***BC*** i zachodzi równość |***CB***| = *2* |***B′C′***|. Podobnie można uzasadnić, że jednokładne są pozostałe boki trójkątów ***A′B′C′*** i ***ABC***.

SP 06 – SYMETRIA OSIOWA

Wprowadzimy teraz najważniejsze przekształcenie, jakim jest symetria osiowa. Na jego bazie uczniowie w liceum wprowadzają inne przekształcenia, takie jak przesunięcia i obroty. Z nią też związane jest pojęcie figur osiowosymetrycznych. Powinniśmy symetrię osiową wprowadzić w sposób konstrukcyjny, dlatego też posłużymy się kilkoma eksperymentami realizowanymi w programie GeoGebra.

Wiemy już, że symetralna dwóch punktów różnych od siebie jest prostą zbudowaną z punktów jednakowo oddalonych od tych punktów.

Wykonajmy teraz zadanie odwrotne:

Mamy symetralną dwóch punktów, ale jeden z nich został usunięty z ekranu, kartki papieru lub tablicy i jest niewidoczny. Jak go przywrócić w miejsce, w którym on się znajdował?

Uruchamiamy plik ***SP06 symetria os 1.ggb.***

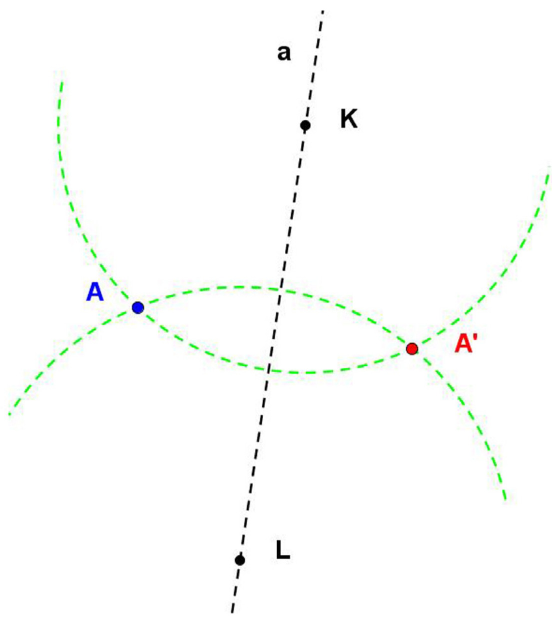
- Na ekranie widzimy punkt ***A*** i prostą **a**, która jest symetralną punktu ***A*** i niewidocznego punktu ***A'***.
- Poszukiwany punkt ***A'*** jest tak samo odległy od każdego punktu symetralnej jak punkt ***A***.
- Zatem wybierzmy na tej symetralnej dwa dowolne punkty ***K*** i ***L*** i zmierzmy cyrklem ich odległości od punktu ***A***.
- Są to oczywiście odległości |***KA***| i |***LA***|.
- Teraz wystarczy zakreślić cyrklem o rozwartości |***KA***| łuk o środku w punkcie ***K*** oraz podobnie z punkt ***L*** łuk o rozwartości cyrkla |***LA***|.
- Czy już wiemy, gdzie znajduje się punkt ***A'***, skoro |***LA***|=|***LA'***| oraz |***KA***| = |***KA'***|?
- Punkt A' zajmuje położenie przecięcia się obu łuków.
- Poruszajmy punktami ***K*** i ***L***.
- Co zauważamy?
- Czy faktycznie prosta ***KL*** jest symetralną punktów ***A*** i ***A'***?
- Poruszajmy punktem ***A***.
- Co dzieje się z punktem ***A'***?

W wyniku tej konstrukcji otrzymaliśmy punkt ***A'*** (rys. 20), mając dany wcześniej punkt ***A*** i symetralną ***a*** obu punktów**.** Powiemy, że:

Punkt A' jest symetryczny do punktu A względem prostej a.

albo, że:

Punkt A' jest obrazem punktu A w symetrii osiowej o osi a.



rys. 20

Teraz wykonamy kilka ćwiczeń, w których wykorzystamy symetrię osiową.

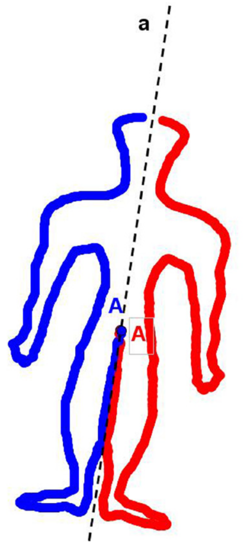
Uruchamiamy plik ***SP06 symetria os 2.ggb.***

Na ekranie GeoGebry widzimy punkt *A*, oś symetrii ***a*** i punkt ***A'*** będący obrazem punktu ***A*** w symetrii osiowej względem tej prostej.

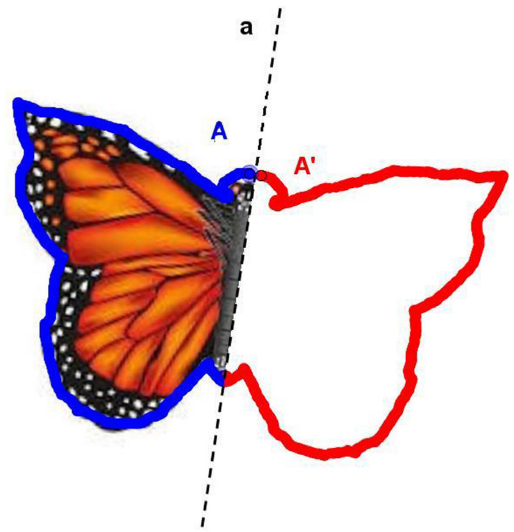
Poruszajmy punktem ***A*** i obserwujemy zachowanie się punktu ***A'***.

Gdzie znajduje się punkt ***A'*** gdy punkt ***A*** leży na prostej ***a***?

Gdzie znajduje się punkt ***A'***, gdy ***A*** znajduje się po lewej stronie prostej ***a***?



rys. 21



rys. 22

- Gdzie znajduje się punkt ***A'***, gdy ***A*** znajduje się po prawej stronie prostej ***a***?
- Włączmy teraz ślad punktu ***A*** i punktu ***A'.***
- Wykreśl jakiś kształt punktem ***A***.
- Co wówczas wykreśla punkt ***A***?
- Czy potrafisz otrzymać taki obraz punktu ***A*** i ***A'*** jaki przedstawia rys. 21?
- Jak byś nazwał swoimi słowami to, co obserwujesz na ekranie?
- W kolejnym etapie pliku GeoGebry widzimy na ekranie połowę obrazu pewnego motyla, gdyż reszta uległa uszkodzeniu.
- Czy masz jakiś pomysł na odnowienie tej uszkodzonej części obrazu?
- Czyli inaczej mówiąc, w jaki sposób uzupełnić obraz pełnego motyla?
- Poruszajmy punktem ***A*** po obrysie widocznej strony zniszczonego obrazu motyla.
- Co wykreśla punkt ***A'***?

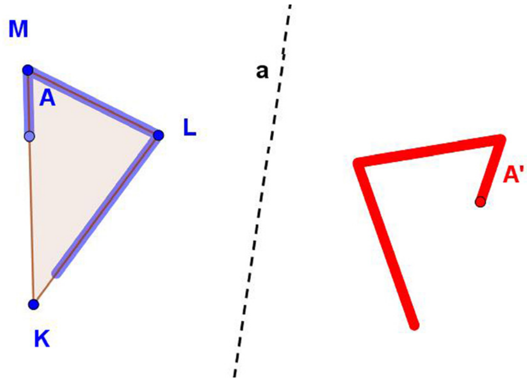
Czy po tym eksperymencie możemy powiedzieć, że figura, jaką wykreślił punkt ***A'***, to prawa połowa motyla – rys. 22?

Czy potrafisz jednym ruchem narysować w podobny sposób inną figurę, np. dzbana, rysując tylko jego połowę?

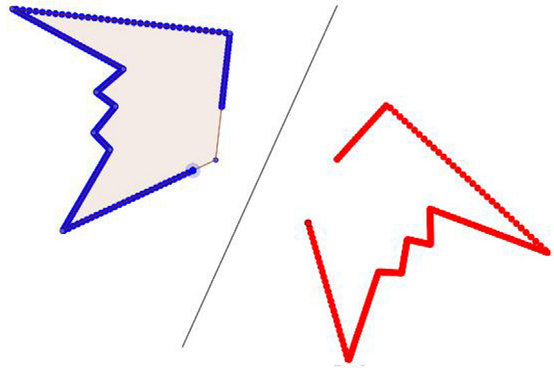
Otwórzmy konstrukcję ***SP06 symetria os 3.ggb.***

Wykonamy jeszcze jeden ciekawy eksperyment. Narysujmy dowolny trójkąt ***ABC*** oraz prostą ***a***.

- Po brzegu trójkąta ***KLM*** spaceruje mrówka (jest nią punkt ***A***), idąc od punktu ***K*** do punktu ***M***, mijając po drodze punkt ***L***.
- Znajdźmy obraz ***A'*** mrówki w symetrii osiowej względem prostej ***a***. Wykorzystujemy w tym celu narzędzie ***Symetria Osiowa*** (***8/1***).
- Poruszajmy muchę ***A*** po brzegu trójkąta.
- W którą stronę porusza się mrówka – zgodnie czy niezgodnie ze wskazówkami zegara?
- Obserwujmy ruch mrówki ***A'.***
- W którą stronę porusza się mrówka ***A'*** – zgodnie czy niezgodnie ze wskazówkami zegara?



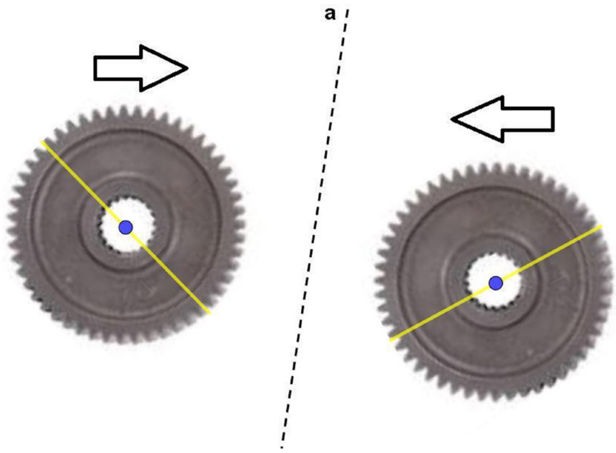
rys. 23



rys. 24

To, co dostrzegliśmy na ekranie, jest bardzo ważnym faktem dla matematyków i fizyków. Nosi nazwę ***orientacji trójki punktów***. Gdy jakiś obiekt porusza się na płaszczyźnie niezgodnie z ruchem wskazówek zegara, wówczas mówimy, że się porusza ***dodatnio***, a jak zgodnie, to mówimy, że ***ujemnie***. Popatrzmy na rysunek.

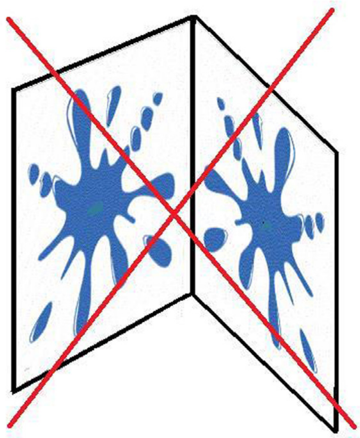
Aby się przekonać, jak to jest ważne w fizyce, popatrzmy na kolejny ekran naszej konstrukcji GeoGebry.



rys. 25

Tutaj koło zębate wycięte z kartonu obracające się zgodnie ze wskazówkami po przekształceniu w symetrii osiowej obraca się w przeciwną stronę. W symetrii osiowej zmienia się zawsze orientacja trójki punktów na przeciwną. Proszę nie traktować tego rysunku jako przestrzennego, bo to się odbywa na płaszczyźnie!

TO NIE JEST SYMETRIA OSIOWA, LECZ OBRÓT W PRZESTRZENI!



rys. 26

Własności odkryte dzięki tym eksperymentom są przeznaczone dla zdolniejszych uczniów, którzy oprócz matematyki interesują się fizyką i informatyką. Opisany problem jest niezbędny w drukowaniu 3D. Tam każdy obiekt trójwymiarowy jest podzielony na małe trójkąty. Jeśli orientacja tych trójkątów jest taka sama na wszystkich ścianach obiektu, wtedy drukowanie powiedzie się, jeśli nie, trzeba najpierw tę orientację zmienić odpowiednim programem komputerowym.

Bardzo ważne jest, by na lekcji nie pokazywać symetrii osiowej w taki sposób, jaki lansują niektóre podręczniki i Internet, kiedy uczeń robi kleksa na kartce papieru, a następnie go odbija przez zagięcie kartki wzdłuż pewnej prostej, tak jak to widać na rysunku 26. To nie jest absolutnie symetria osiowa, lecz obrót w przestrzeni wokół linii zagięcia, czyli przekształcenie w trzecim wymiarze.

Drugi błąd, jaki popełniamy często, to ukazywanie symetrii osiowej poprzez odbicie w lustrze! 'To też nie jest symetria osiowa, lecz symetria płaszczyznowa, czyli znowu przekształcenie w geometrii 3D – rys. 27!

TO NIE JEST SYMETRIA OSIOWA, TYLKO PŁASZCZYZNOWA!

rys. 27

Szkoda, że o tym się nie mówi w programie matematyki szkolnej, bo uczniowie przez to mylą podstawowe rzeczy i mieszają geometrię płaską z przestrzenną. Wyjściem z tego impasu jest najlepiej uczyć w ostatnich klasach o symetrii płaszczyznowej (nazywanej często lustrzaną).

Jako podsumowanie aż się prosi pokazać konstrukcję GeoGebry, która mentalnie wytworzy uczniom prawidłowe pojęcie symetrii osiowej i odróżni ją od innego przekształcenia znanego uczniom z życia.

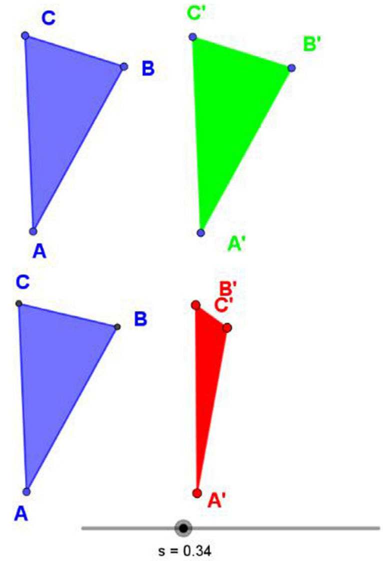
Otwórzmy plik SP06 ***symetria osiowa 4.ggb.***

- Przesuńmy suwak s od wartości 0 do 1.
- W jakim przekształceniu przeszedł niebieski trójkąt ABC w jednym, a w jakim w drugim na trójkąty ***A'B'C'*** czerwony i zielony?
- Jeżeli coś ma nam pomóc, to winowajcą jest coś ukrytego – odznacz przycisk o nazwie „winny całego zamieszania".

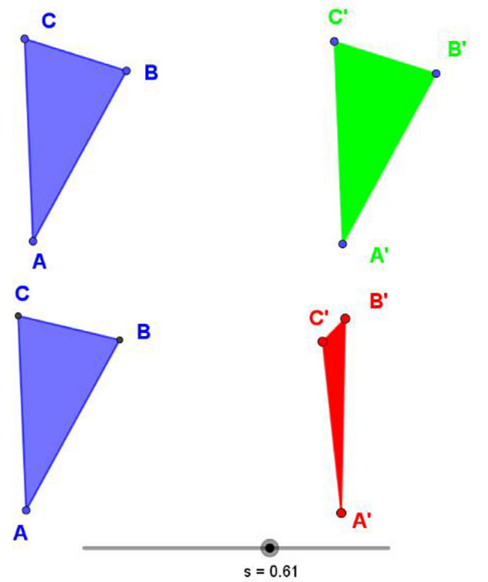
Uczniom sprawia trudność to, że w dolnym przekształceniu trójkąt ***ABC*** w ich umysłach „obraca" się i tak też mówią na to przekształcenie u dołu.

Dopiero odkrycie za pomocą przycisku prostej będącej osią symetrii upewnia ich w przekonaniu, że mają do czynienia z symetrią osiową. Widać też wyraźnie, że zmieniła ona orientację trójkąta niebieskiego przy przejściu w czerwony.

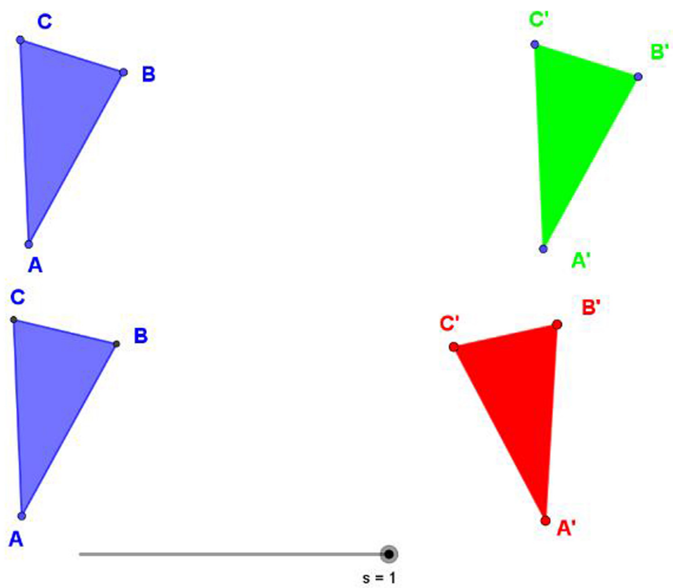
Pierwszy trójkąt u góry uległ tylko przesunięciu. Uczniowie, mimo że nie znają formalnie tego przekształcenia, to rozumieją, o co chodzi.



rys. 28



rys. 29



rys. 30

SP 07 – FIGURY OSIOWOSYMETRYCZNE

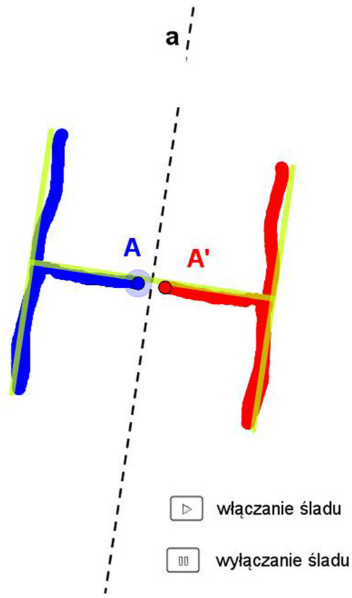
Od symetrii osiowej do figur osiowosymetrycznych droga jest krótka. Trzeba zdać sprawę uczniom, że figura płaska jest osiowosymetryczna, jeśli każdy jej punkt odbity w symetrii osiowej jest punktem tej samej figury.

Poprzedzimy te działania kilkoma eksperymentami.

Otwórzmy plik ***SP07 figury osiowosymetryczne 1.ggb***

Polecenie do tego pliku jest następujące:

- Dany jest punkt ***A*** i jego obraz ***A'*** w symetrii osiowej.
- Włączmy ślady punktu ***A*** i ***B***.
- Czy potrafimy tak poruszać punktem ***A*** po ekranie, by wykreślić widoczną literę, przy czym każdy fragment tej litery musi być tylko jednego koloru.
- Czy udało się to zrobić?



rys. 31

Uczeń może to zadanie przetestować na kilku dużych literach alfabetu. W niektórych uda mu się wykonać zamierzone zadanie, w niektórych przypadkach nie. Jeżeli potrafił wykonać to zadanie, to oznacza, że punkt leżący na danej „literze" ma swój obraz w symetrii osiowej, który też leży na tej figurze. Jeżeli był to niebieski punkt **A**, to jego czerwony obraz ***A'*** wykreślił drugą część tej figury, a jeśli zrobił to punkt czerwony, to niebieski zrobił resztę, zatem każdy punkt tej figury miał swój obraz w symetrii osiowej, który należał też do figury.

Wprowadźmy definicję:

Definicja

Figura jest osiowosymetryczna, gdy każdy punkt tej figury ma obraz w pewnej symetrii osiowej, który należy też do figury.

Zatem które z liter alfabetu są takimi figurami?

Bardzo ważne są tu dwa sformułowania: „***każdy punkt***" oraz „***ma obraz w pewnej symetrii …"***

Aby uczeń o tym się przekonał, zaaplikujemy mu zadanie z kontrprzykładem.

Kolejne ćwiczenie polega na tym, że uczeń musi dobrać położenie osi symetrii, jeśli figura jest osiowosymetryczna. Chodzi o to, by wyćwiczyć „oko", które dostrzega tę symetrię.

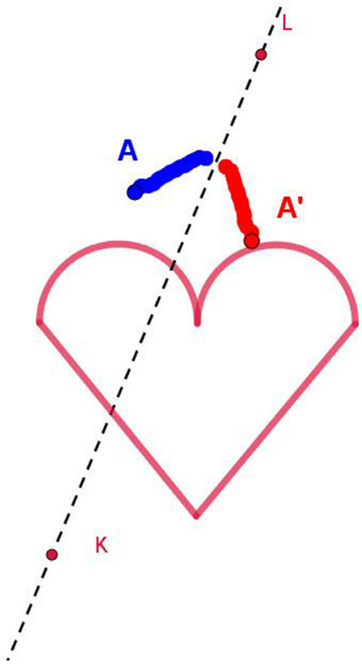
Otwórzmy plik ***SP07 figury osiowosymetryczne 2.ggb.***

Dany jest punkt ***A*** i jego obraz ***A'*** w symetrii osiowej. Dany jest punkt ***A*** i jego obraz ***A'*** w symetriii osiowej.

Wykreślona jest też pewna figura, która być może jest osiowosymetryczna.

Brakuje natomiast osi symetrii. Uruchom ją za pomocą punktów ***K*** i ***L*** i ułóż tak, by była osią symetrii tej figury.

Sprawdź za pomocą punktów ***A*** i ***A'***, czy słusznie oceniłeś tę figurę jako osiowosymetryczną? Które z tych figur nie są osiowosymetryczne?



rys. 32

SP 08 – SYMETRIA ŚRODKOWA i FIGURY ŚRODKOWOSYMETRYCZNE

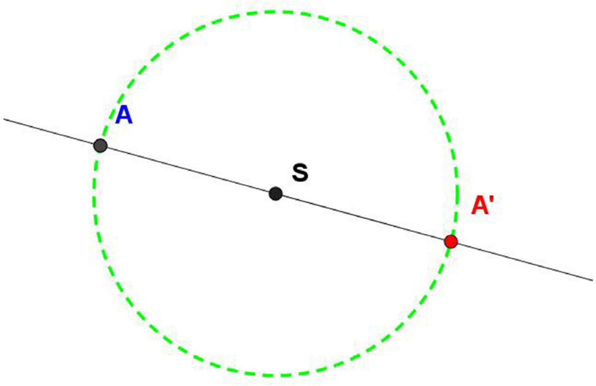
Poznamy kolejne przekształcenie geometryczne z planimetrii, z którym mamy do czynienia, oglądając różne przedmioty, szczególnie ozdoby i dzieła sztuki architektonicznej. To jest wiedza niezbędna dla konserwatorów zabytków, którzy muszą się zmierzyć z odnawianiem zniszczonych ścian, ornamentów i wzorów, gdyż one najczęściej są tworzone w oparciu o symetrie osiowe i środkowe.

Zacznijmy tradycyjnie od eksperymentu w GeoGebrze: Otwórzmy plik ***SP symetria środkowa.ggb***

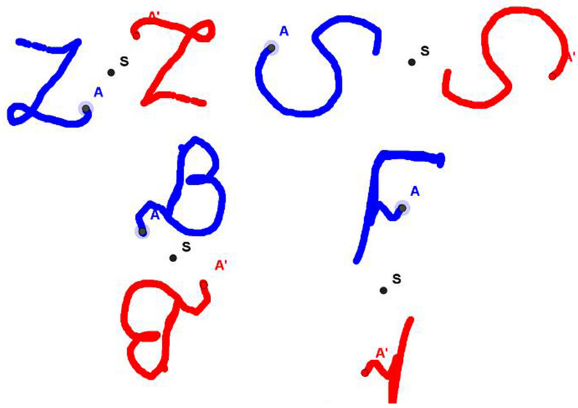
Na ekranie pojawia się punkt ***A*** oraz punkt ***S*** zwany środkiem symetrii środkowej.

Aby odbić w symetrii środkowej punkt ***A***, przeprowadzimy przez punkty ***A*** i ***S*** prostą.

Następnym krokiem jest wykreślenie cyrklem okręgu o środku w punkcie ***S*** przechodzącym przez punkt ***A***. Drugi punkt przecięcia tego okręgu z prostą ***SA*** jest poszukiwanym obrazem punktu ***A*** w symetrii środkowej o środku ***S***. Nazwijmy go ***A'***



rys. 33



rys. 34

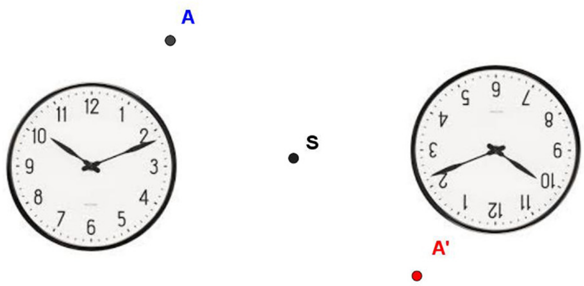
Potraktujmy teraz punkt ***A*** dynamicznie i pozwólmy nim poruszać się po płaszczyźnie. Włączmy ślad obu punktów i obserwujmy, jak zachowuje się punkt ***A'*** pod wpływem ruchu punktu ***A***? Wykreślmy dla przykładu kilka liter. Co zauważamy?

Zauważmy, że każda z liter po odbiciu w symetrii środkowej jest jakby odbita „do góry nogami", ale chyba nie zmieniła się w nich orientacja zgodności lub niezgodności ze wskazówkami zegara tak, ja się zmieniała w symetrii osiowej.

Sprawdźmy tę zgodność z ruchem wskazówek zegara na konkretnej tarczy zegara. Poruszajmy punktem ***A*** i obserwujmy, co dzieje się z punktem ***A'***?

Czy oba zegary wskazują ten sam czas?

Okazuje się, że symetria środkowa nie psuje orientacji tak jak to czyniła symetria osiowa. Obserwując oba zegary na rysunku 35, pojawia się pytanie, czy zegary te chodzą jednakowo? Czy któryś z nich nie przyspiesza lub nie zwalnia w pewnych momentach?



rys. 35

A co by się stało, gdyby ten drugi, odbity w symetrii zegar nie miał na cyferblacie zaznaczonych cyfr. Wtedy odczytywalibyśmy czas według położenia wskazówek. Teraz gdy na pierwszym zegarze jest godz.10.12, na drugim widoczna byłaby wtedy 4.42. Widać, że odstęp czasu między tymi wskazaniami jest równy dokładnie 5.30 h. A czy w innym położeniu też jest taka sama różnica? Jeśli jest inna, to znaczy, że jeden z tych zegarów chodzi niejednostajnie.

Podobnie, jak to robiliśmy dla symetrii osiowej i figur osiowosymetrycznych, możemy teraz wprowadzić pojęcie figur środkowosymetrycznych. Według poprzedniej definicji miałoby to oznaczać, że każdy punkt takiej figury po odbiciu jest punktem tej samej figury.

Weźmy pod rozwagę okrąg i koło. Czy są one figurami środkowosymetrycznymi?

Teraz zmienimy nieco technikę badań, zastępując narzędzie ***Ślad*** opcją ***Miejsce Geometryczne.***

Za każdym razem punkt ***A*** będziemy umieszczać na obiekcie, po którym miałby się przemieszczać. Zrobimy to poprzez przedefiniowanie punktu – narzędzie w ikonie 1/3.

Przedefiniujmy punkt ***A*** na okrąg przy użyciu tego narzędzia.

Następnie wybierzmy narzędzie ***Miejsce Geometryczne (3/8)*** i wskażmy najpierw punkt ***A'***, a potem ***A***. ***A'*** wykreśli wówczas obraz okręgu w symetrii środkowej.

Jak widać obrazem okręgu w symetrii środkowej jest inny okrąg. A czy może być nim ten sam okrąg, na którym leży punkt A?

Chwyćmy w tym celu środek ***S*** symetrii środkowej i przenieśmy go w takie miejsce, by czerwony okrąg pokrył się z niebieskim.

Gdzie musi się znaleźć punkt ***S***, by było spełnione nasze życzenie?

Jak widać z eksperymentu, środek symetrii musi być środkiem okręgu bazowego. Wówczas okrąg ten przejdzie w ten sam okrąg.

To oznacza, że okrąg jest środkowosymetryczny. Znaleźliśmy więc sposób na rozstrzyganie, czy dana figura jest środkowosymetryczna.

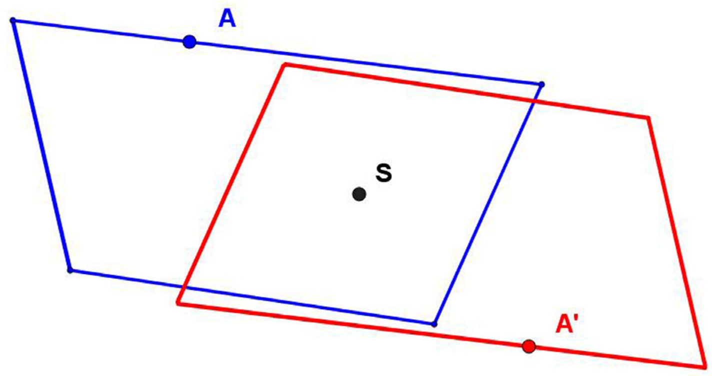
Zbadajmy, które z czworokątów są środkowosymetryczne – rys. 36.

W tym celu punkt **A** zamocujemy na brzegu czworokąta i znajdziemy jego obraz w symetrii środkowej względem punktu **S**.

Następnie zastosujemy, podobnie jak z okręgiem, narzędzie Miejsce Geometryczne, które wykreśli obraz naszego czworokąta.

Jak widzimy, obrazem naszego czworokąta jest inny czworokąt.

Teraz trzeba wykazać się dobrym sprytem matematycznym i poszukać takie położenie środka **S** symetrii i takie ustawienia wierzchołków naszego czworokąta, by przekształcony (czerwony) pokrył się z bazowym niebieskim.



rys. 36

Dobierając wierzchołki niebieskiego czworokąta tak, by oba czworokąty pokryły się, odnajdziemy wszystkie czworokąty, które są środkowosymetryczne.

Znajdźmy w podobny sposób środkowosymetryczne pięciokąty, sześciokąty i siedmiokąty, czworokąty wklęsłe i jeszcze inne figury.

Które z dużych liter alfabetu są środkowosymetryczne?

SP 09 – ŚRODEK CIĘŻKOŚCI TRÓJKĄTA

Tę lekcję rozpoczynamy od eksperymentu. Wycinamy z twardej tektury albo ze sklejki trójkąt i poszukujemy takiego punktu na obszarze tego trójkąta, by po podłożeniu w tym punkcie palca trójkąt znajdował się nieruchomo w położeniu poziomym. Fizycznie ujmując to słowami, możemy powiedzieć, że trójkąt znajduje się w równowadze trwałej.

Cała radość tego eksperymentu polega na poszukiwaniu tego punktu. Dobrze, gdy poszukujemy go dla kilku takich trójkątów, gdyż będzie okazja porównania dostrzeżonych faktów dla innych trójkątów (np. rozwartokątnych) i postawienia jakiejś hipotezy.

Gdy uczniowie znajdą dla swoich trójkątów ten punkt jak najdokładniej, wówczas możemy im zaproponować cykl poleceń – konstrukcja GeoGebry ***SP09 środek ciężkości trk1.ggb:***

- poprowadźmy prostą przez odnaleziony w trójkącie punkt i dowolny wierzchołek tego trójkąta,
- powtórzmy to dla innych wierzchołków tego samego trójkąta,
- co zauważamy?

Uczniowie zauważą, że proste te przecięły się wzajemnie. Stawiamy im kolejny problem:

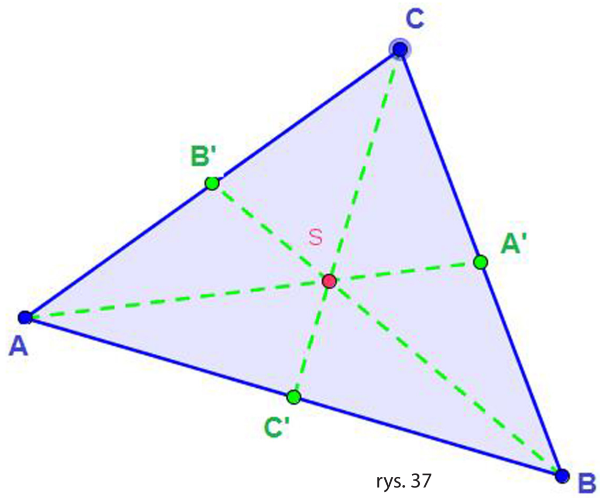
- gdzie każda z tych prostych przecina przeciwległy bok trójkąta?

Tu właśnie widać konieczność wykonywania eksperymentu przez kilku uczniów – to wyzwala dyskusję i burzę mózgów uczniów.

Efektem tego są dwie hipotezy:

Punkt, który pozostawia w przestrzeni trójkąt w równowadze poziomej, znajduje się w przecięciu prostych (albo odcinków) wyznaczonych przez wierzchołki trójkąta i środki przeciwległych im boków.

Aby jeszcze bardziej przekonać uczniów do odkrytego przez nich faktu, wykonujemy na zupełnie innym, niebadanym jeszcze trójkącie konstrukcje tych prostych i punkt ich przecięcia. Następnie jeden z uczniów sprawdza, czy palec podłożony w tym znalezionym konstrukcyjnie punkcie utrzymuje trójkąt w równowadze.



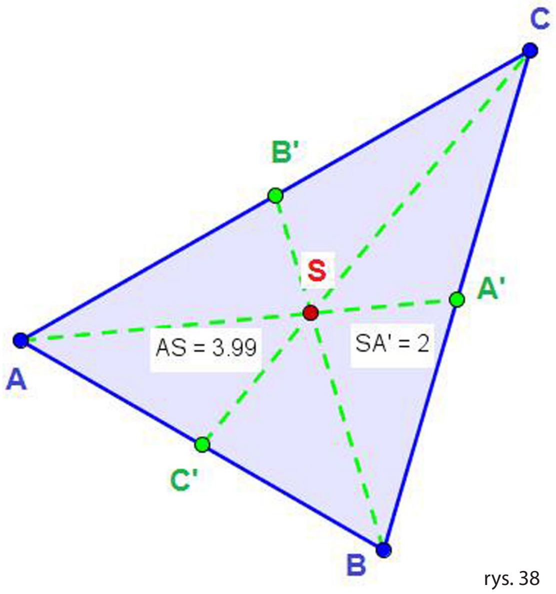
rys. 37

Wprowadzamy pojęcie środkowych trójkąta jako odcinków łączących środki boków trójkąta z przeciwległymi wierzchołkami trójkąta.

Tutaj powinno pojawić się pojęcie środka ciężkości trójkąta, jako punktu, który zastępuje ciężar tego trójkąta, czyli punktu, w którym przecinają się środkowe trójkąta.

Przechodzimy do konstrukcji GeoGebry w której będziemy mogli powtórzyć konstrukcję i odkryć jeszcze kilka własności trójkąta i jego środka ciężkości.

- W dowolnym trójkącie ***ABC*** wyznaczmy środki jego boków **–** rys. 38
- Oznaczmy środek boku ***BC*** – ***A'***, środek boku ***CA*** – ***B'***, środek boku ***AB*** – ***C'***.
- Utwórzmy odcinki ***AA'*** i ***BB'***.
- Odcinki łączące środki boków trójkąta z wierzchołkami leżącymi naprzeciw tych boków nazywamy ***środkowymi trójkąta***.



rys. 38

- Znajdźmy punkt przecięcia ***S*** tych odcinków.
- Poprowadźmy odcinek ***CC'***.
- Czy odcinek ***CC'*** przechodzi przez punkt **S**?
- Sprawdzimy to po zmianie położenia wierzchołków trójkąta.
- Punkt przecięcia się środkowych trójkąta nazywamy jego ***środkiem ciężkości***.

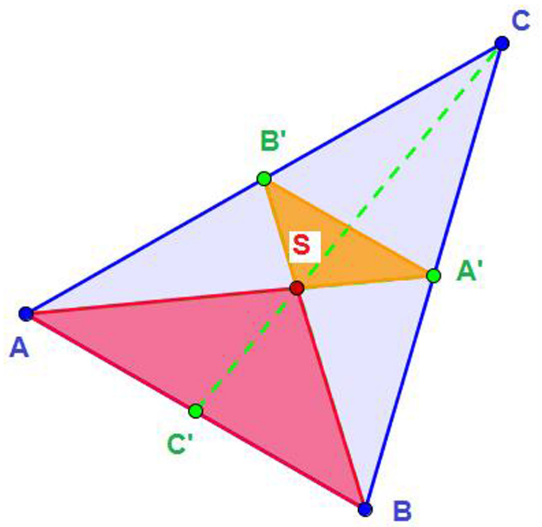
Tak więc punkt ***S*** jest środkiem ciężkości trójkąta ***ABC***.

Spróbujmy na bazie tej konstrukcji odkryć z uczniami własności środka ciężkości.

- Poruszajmy wierzchołkami trójkąta ***ABC*** i obserwujmy, czy położenie środka ciężkości tego trójkąta jest przypadkowe?
- Czy może on znaleźć się poza trójkątem?
- Dlaczego?
- Czy jest on zawsze bliżej dowolnego z wierzchołków trójkąta, czy środka przeciwległego boku.
- Zaobserwujmy to na przykładzie odcinków ***SA*** i ***SA'***.
- Zmierzmy odległości ***SA*** i ***SA'***.
- Czy liczby te są przypadkowe?
- Podzielmy wielkość |***SA***| przez |***SA'***|.
- Co dostrzegamy?
- Sformułujmy i uzasadnijmy odkryte własności.

Obserwacja pomiaru długości odpowiednich odcinków dla rozmaitych położeń i kształtów trójkąta pozwala postawić hipotezę:

środkowe trójkąta dzielą się w stosunku 1:2 *– rys. 38.*



rys. 39

Dowód tego faktu nie jest trudny.

Wystarczy spojrzeć na trójkąty *ABS* i *A'B'S* – rys. 39

Ponieważ odcinek *B'A'* łączy środki boków *AC* i *BC*, więc jest równoległy do *AB* i dwa razy od niego krótszy.

Oba te trójkąty mają takie same miary odpowiednich kątów, gdyż $\angle ASB$ i $\angle A'SB'$ są kątami wierzchołkowymi, a pozostałe są naprzemianległymi.

Trójkąty te są więc podobne i skalą ich podobieństwa jest liczba

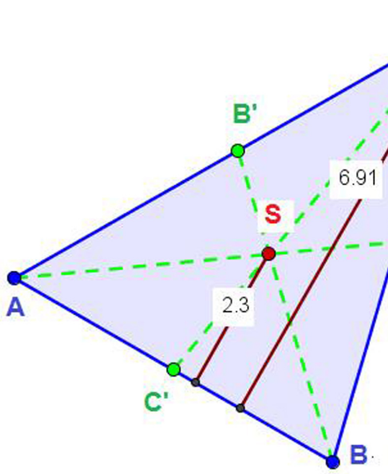
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = 2$$

Zatem pozostałe boki muszą też zachować tę samą proporcję:

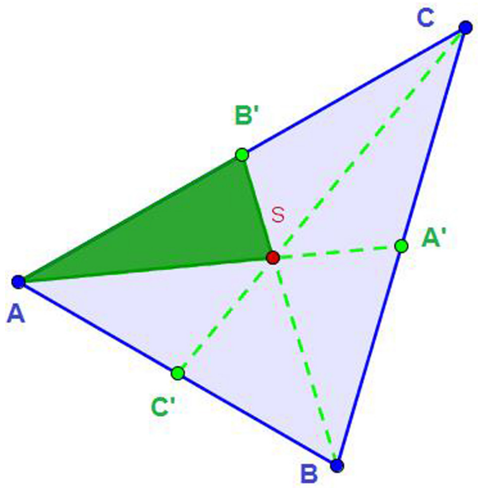
$$\frac{|SA|}{|SA'|} = 2$$

Z tej własności wynika, że krótszy odcinek środkowej, na jaki środek ciężkości dzieli środkową, stanowi 1/3 jej długości, przy czym środek ciężkości znajduje się zawsze bliżej środka boku niż wierzchołka, który leży naprzeciw tego boku i jest drugim końcem środkowej.

Można też uzasadnić drugi fakt, który udało się odkryć – pola sześciu trójkątów, na które środkowe podzieliły obszar trójkąta, są równe.



rys. 40



rys. 41

Zwróćmy jeszcze uwagę na sześć trójkątów, na które został podzielony trójkąt środkowymi.

Łatwo zauważyć, że trójkąty ***ABB'*** i ***CB'B*** mają te same pola, gdyż ich podstawy (***AB'*** i **CB')** i wysokości są równe.

W trójkącie ***ABS*** pola trójkątów ***AC'S*** i ***C'BS*** są równe z tych samych powodów.

Ponieważ wysokość trójkąta ***ABS*** to 1/3 wysokości trójkąta ***ABC*** – rys. 41, więc jego pole to również 1/3 pola całego trójkąta, gdyż mają tę samą podstawę.

Zauważmy, że:

$$P_{\Delta ASB'} = P_{\Delta ABB'} - P_{\Delta ABS'}$$

więc

$$P_{\Delta ASB'} = \frac{1}{2} P_{\Delta ASB'} - \frac{1}{3} P_{\Delta ASB'} = \frac{1}{6} P_{\Delta ASB'}$$

To dowodzi, że wszystkie sześć trójkątów, na jakie środkowe podzieliły trójkąt ***ABC***, mają równe pola, stanowiące 1/6 pola całego trójkąta.

Zbierzmy odkryte i uzasadnione własności trójkąta w postaci twierdzeń.

Twierdzenie

Środkowe każdego trójkąta przecinają się w jednym punkcie zwanym środkiem ciężkości. Dzieli on każdą ze środkowych w stosunku ½ w taki sposób, że środek ciężkości jest bliżej tego końca środkowej, która jest środkiem boku.
Sześć trójkątów, na jakie środkowe podzieliły trójkąt ABC, mają równe pola, stanowiące 1/6 pola całego trójkąta.

Lekcję kończymy zadaniem domowym polegającym na znalezieniu zastosowania środka ciężkości w różnych sytuacjach życiowych. Należy dokładnie omówić przygotowane przez uczniów zadanie i ewentualnie uzupełnić ich przykłady.

Na przykład akrobata, cyrkowiec dzięki odpowiednim ułożeniom ciała zachowuje takie położenie środka ciężkości, by nie stracić równowagi. Para tańcząca na parkiecie może łatwo się przewrócić, jeśli jeden z partnerów zaczepi butem o jakąś przeszkodę. Ciało partnera przechyla się, pociągając drugie za sobą, środek ciężkości zostaje przesunięty poza tańczącą parę i traci ona równowagę. Wieża radiowo-telewizyjna utrzymuje swoją równowagę też dzięki wiedzy o środku ciężkości.

Do czego może służyć znajomość środka ciężkości trójkąta? Otwórzmy plik ***SP09 środek ciężkości trk 2.ggb***

Budowniczy wysokich wież radiowo-telewizyjnych ustawiają je w taki sposób, że dolna część masztu znajduje się w stałym punkcie, a liny odciągające utrzymują je w równowadze. Z różnych poziomów wysokości wieży odchodzą po trzy, cztery liny zakotwiczone głęboko w żelbetonowych uchwytach w ziemi w wierzchołkach pewnego trójkąta. Rysunek 42 to zdjęcie lotnicze Chorągwicy, następne to kolejne jej zbliżenia.

rys. 42

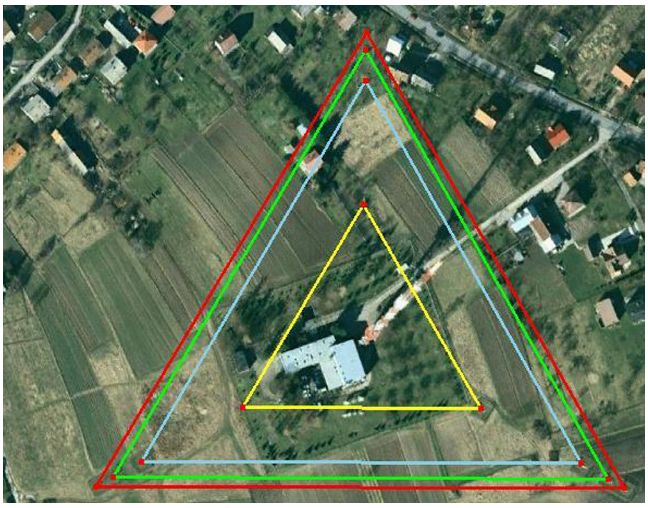
Rysunek 44 ilustruje liny naciągowe – ich rozmieszczenie jest ściśle związane ze środkiem ciężkości trójkąta.

rys. 43

rys. 44

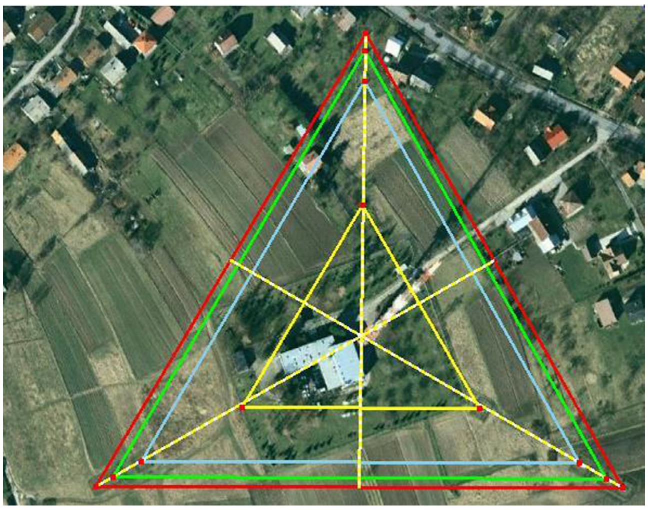
Popatrzmy na zdjęcie satelitarne wieży telewizyjnej i jej okolicy.

rys. 45



rys. 46

Odnajdźmy tam kotwy lin naciągowych i zobaczmy ich rozmieszczenie.



rys. 47

Na rysunku 46 widzimy trójkąty, których wierzchołki to miejsca zakotwiczenia lin naciągowych. Wszystkie cztery trójkąty są równoboczne, a ich boki są do siebie równoległe. Na rys. 47 widzimy środek ciężkości tych trójkątów – jest to punkt, w którym posadowiona jest konstrukcja wieży.

Jak widać, pojęcie środka ciężkości jest niezbędne w projektowaniu i budowaniu masztów radiowo-telewizyjnych.

SP 10 – ŚRODEK CIĘŻKOŚCI CZWOROKĄTA

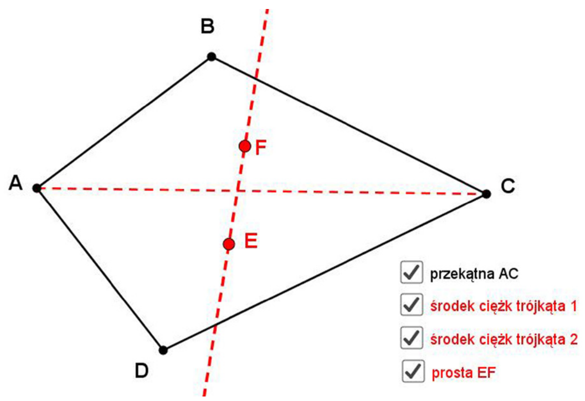
Być może uczniów może zainteresować sposób konstruowania środka ciężkości dowolnego czworokąta. W tym celu wykonuje się prostą konstrukcję, która zamieszczona jest w pliku GeoGebry ***SP10 środek ciężkości czwor.ggb***.

Po wykreśleniu dowolnego czworokąta:

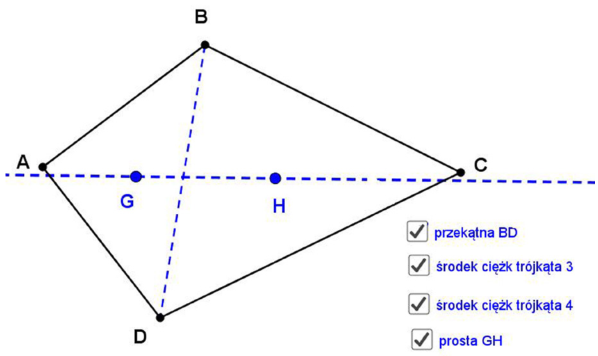
Dzielimy go jedną z przekątnych na dwa trójkąty.

Konstruujemy środek ciężkości obu trójkątów.

Łączymy te środek odcinkiem (lub prostą) – rys. 48.



rys. 48



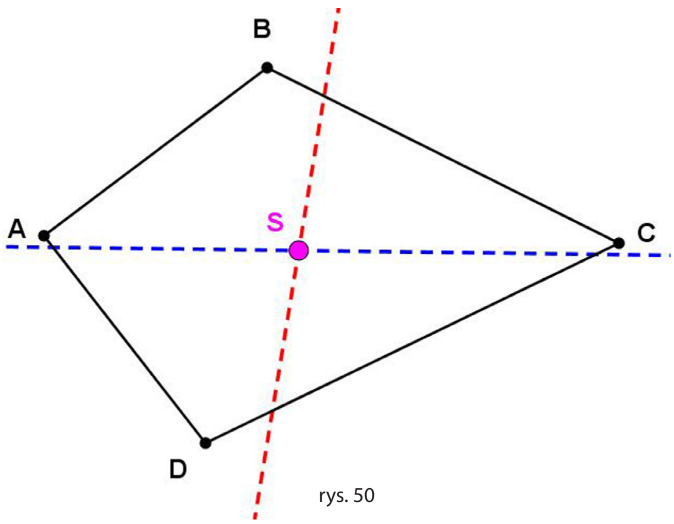
rys. 49

Następnie dzielimy ponownie czworokąt na dwa trójkąty drugą przekątną.

Znów wyznaczamy środki ciężkości obu trójkątów.

Łączymy te środki ciężkości odcinkiem (lub prostą) – rys. 49.

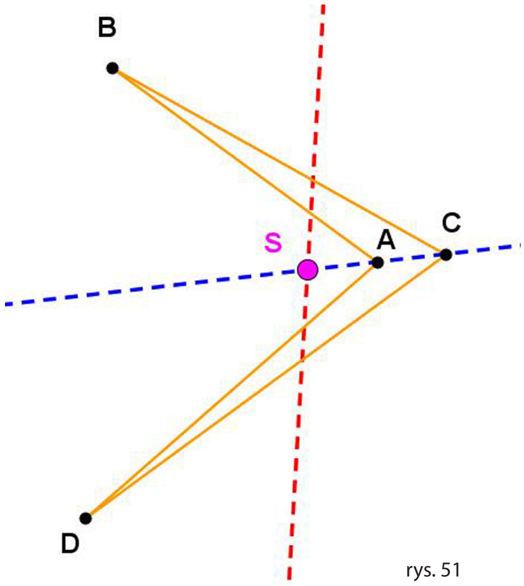
Miejsce przecięcia obu utworzonych prostych wyznacza środek ciężkości czworokąta – rys. 50.



rys. 50

A co z czworokątem wklęsłym? Myślę, że to jest dobry przykład do sprawdzenia, gdzie znajduje się wówczas środek ciężkości tego czworokąta?

Znajdźmy go w programie GeoGebra:



rys. 51

Jak widać, znajduje się on poza czworokątem (rys. 51).

Fakt ten wykorzystują mechanicy i konstruktorzy w rozmaitych konstrukcjach. My wykonamy doświadczenie, które może każdy powtórzyć w domu.

Połączmy widelec z łyżką i umieśćmy w tym zestawie patyk, który oprzemy na brzegu garnuszka. Zobaczmy, czy ten zestaw wywrócił się? Dlaczego tak się dzieje?

rys. 52

TWIERDZENIE PITAGORASA

Twierdzeniu Pitagorasa poświęconych jest wiele lekcji matematyki zarówno w szkole podstawowej, jak i średniej. Głównie są to lekcje rachunkowe. Oto propozycja wprowadzenia tego twierdzenia metodą odkrywczą.

Znane są rozmaite dowody tego twierdzenia (jest ich ok. 170 geometrycznych i 60 algebraicznych). Zapoznawanie się z nimi przez czytanie lektury wymaga od uczącego wiele wysiłku w przetwarzaniu „w myśli" obserwowanych rysunków, wykonywaniu obliczeń pomocniczych i logicznym wnioskowaniu, by dojść do tezy.

Wydaje mi się, że w tym momencie komputer może odegrać niebagatelną rolę. Jego dynamiczne przetwarzanie rysunku czy konstrukcji odciąża czytającego lekturę od tych niepozbawionych często stresu i zniechęcenia żmudnych postępowań. Obserwowanie takiego ożywionego rysunku wraz z zamieszczonymi na ekranie poleceniami do wykonania może bardzo pomóc w odkryciu tego twierdzenia. Na pewno też może uatrakcyjnić lekcje matematyki.

Nie chciałbym, aby ta metoda była rozumiana jako panaceum na lekcję poświęconą twierdzeniu Pitagorasa. Chcę, by to była propozycja pewnego rozwiązania dydaktycznego. Czytelnik sam uzna, co może z tego wykorzystać w swojej lekcji.

Zacznijmy więc…

KONSTRUKCJA SP11 Pitagoras01.ggb

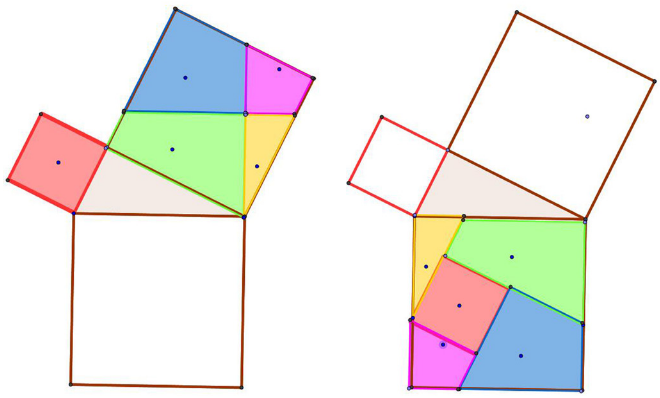
Konstrukcja ta to pierwsze spotkanie z twierdzeniem Pitagorasa; można by więc rzec, że na poziomie pierwszej klasy SP. Dziecko układa niczym puzzle wielokąty znajdujące się w dwóch mniejszych kwadratach i umieszcza je w największym kwadracie. To nic, że nie zna pojęcia kąta prostego i trójkąta prostokątnego. Układanka sama w sobie jest już intrygująca.

Jeśli konstrukcję tę uczeń przypomni sobie w starszej klasie, nastąpi zaakcentowanie problemu, może jakiś przebłysk i inne, dojrzalsze spojrzenie, skojarzenie faktów, niczym na filmie oglądanym ponownie, w którym zauważamy to, czego nie widzieliśmy wcześniej.

Otwieramy plik *SP11 Pitagoras01.ggb*

Oto polecenie dołączone do konstrukcji GeoGebry.

- Chwytając myszą za czarne punkty, umieść kolorowe wielokąty w kwadracie zbudowanym na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego.
- Możesz zmienić konfigurację rysunku przez zmianę położenia punktu ***P***.
- Sformułuj dostrzeżoną własność trójkąta prostokątnego, uwzględniając fakt dokonywania zmian w konfiguracji konstrukcji.



rys. 53

Rzecz polega na tym, by uczeń samodzielnie dokonywał odkrycia tego twierdzenia tak, jak odkrył go Pitagoras, używając podobno kamyczków wypełniających odpowiednie kwadraty.

Uczniowie nie znają pojęć przyprostokątnych ani przeciwprostokątnej. Mogą natomiast zmierzyć kąt między krótszymi bokami trójkąta lub przykładając tam (w klasie 1 czy 2) ekierkę, o której uczniowie wiedzą intuicyjnie, że zawiera kąt prosty.

Efektem takiej lekcji może być sformułowanie przez uczniów następującego twierdzenia, które niewiele różni się od znanego nam twierdzenia:

Twierdzenie

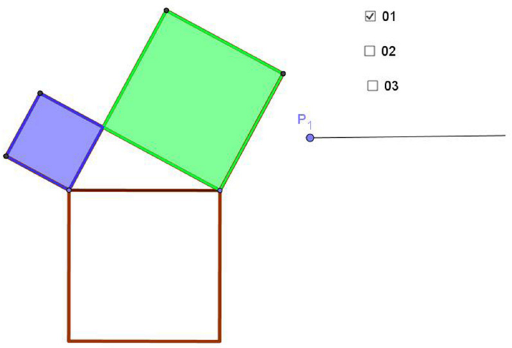
Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadraty zbudowne na krótszych bokach trójkąta można tak rozciąć, że ich obszary wypełnia kwadrat zbudowany na najdłuższym jego boku.

KONSTRUKCJA SP11 Pitagoras02.ggb

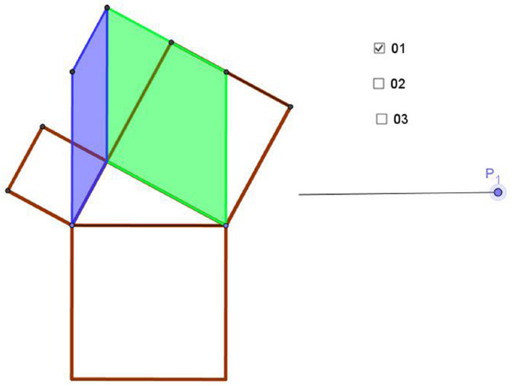
W tej propozycji lekcji mamy do czynienia nie tyle z odkryciem, ile już z próbką geometrycznego dowodu twierdzenia Pitagorasa. Jej autorem jest Nissir-ed-Dina (1594 r.).

Dowód składa się z kilku kroków polegających na wykazaniu, że suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta prostokątnego jest taka sama jak pole kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku tego trójkąta. Po prostu konstrukcja ta pokazuje, jak kwadraty mniejsze zmieścić w tym największym.

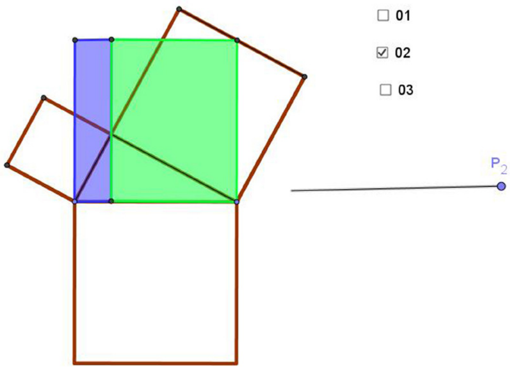
Rysunki ilustrują cztery fazy dowodu tego twierdzenia. Rola nauczyciela polega na tym, by uczeń zrozumiał, dlaczego kwadrat niebieski i zielony, mimo że przeinaczają się w równoległoboki, to ich pole nie zmienia się (nie zmienia się długość pewnych podstaw i wysokości tych figur)



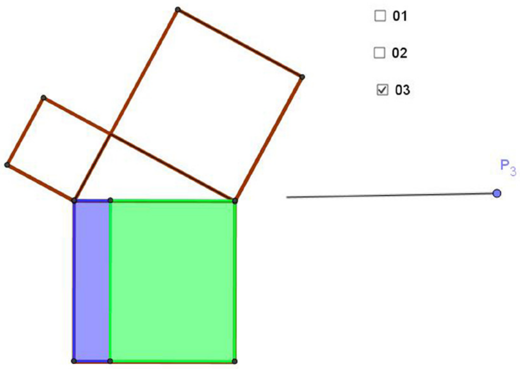
rys. 54



rys. 55



rys. 56



rys. 57

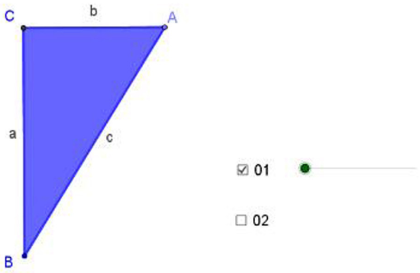
Oto polecenie programu GeoGebra:

- Wciśnij przycisk 01.
- Gdy pojawi się suwak P_1 przesuń go do końca w prawo.
- Powtórz tę czynność dla pozostałych przycisków i suwaków.
- Czy pole kwadratu niebieskiego zmienia się w trakcie przekształcania go w kolejne czworokąty?
- Dlaczego?
- Czy to samo możesz powiedzieć o kwadracie zielonym?

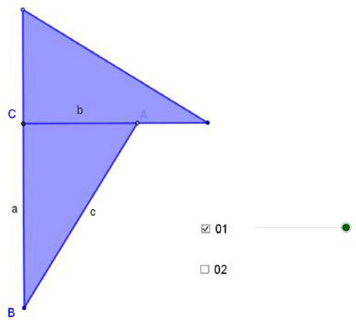
KONSTRUKCJA SP11 Pitagoras03.ggb

Autorem tego dowodu twierdzenia Pitagorasa jest amerykański polityk James Abram Garfield (1831–1881), który w niecały rok po objęciu urzędu prezydenta USA został zamordowany. Garfield był również wynalazcą urządzenia do wykrywania metali. Konstrukcja ta może posłużyć jako kanwa do odkrycia twierdzenia Pitagorasa. Nadaje się również z powodzeniem do przeprowadzenia dowodu tego twierdzenia już w ostatniej klasie SP.

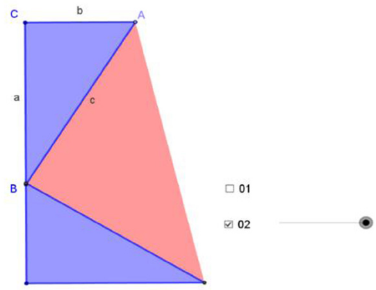
Dowód składa się z kilku kroków i kilku prostych rachunków wyznaczających pola pewnego trapezu na dwa sposoby.



rys. 58



rys. 59



rys. 60

Oto polecenia programu GeoGebera:

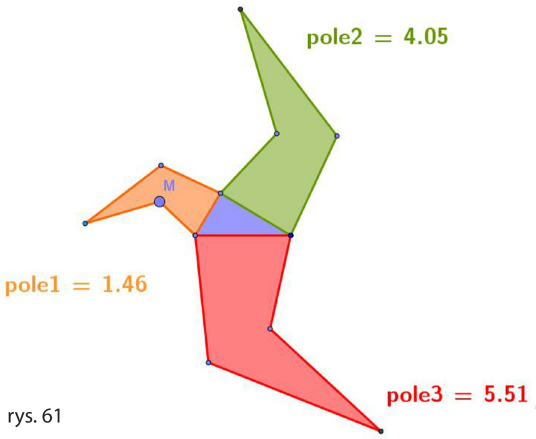
- Włączmy najpierw przycisk ***01*** i przesuńmy suwak do końca w prawo.
- W ten sposób obróciliśmy trójkąt o 90° i pozostawiliśmy jego kopię (mamy teraz dwa trójkąty)
- Teraz włączmy przycisk ***02*** i przesuńmy kolejny suwak do końca w prawo.
- Górny trójkąt z uległ przesunięciu w dół i powstał dodatkowo trapez.
- Oblicz pole tego trapezu na dwa sposoby:
- jako sumę pól trzech trójkątów,
- tradycyjnie jak pole trapezu.
- Porównaj algebraicznie ze sobą oba wyniki i zobacz, co otrzymałeś po zredukowaniu wyrazów podobnych.

Uczniowie powinni poradzić sobie z obliczeniem pola trapezu na dwa sposoby. Jest to okazja do powtórzenia teorii o polach czworokątów. Z porównania tych pól pojawi się teza twierdzenia Pitagorasa.

KONSTRUKCJA SP11 Pitagoras04.ggb

A to przykład figur podobnych, zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego.

Otwórzmy plik ***SP11 Pitagoras 41.ggb.*** Można doświadczalnie przekonać się, że niezależnie od kształtu wielokątów z jednoczesnym zachowaniem ich podobieństwa suma pól zbudowanych na krótszych bokach trójkąta prostokątnego jest równa polu wielokąta podobnego do nich, zbudowanego na przeciwprostokątnej (najdłuższym boku trójkąta prostokątnego).

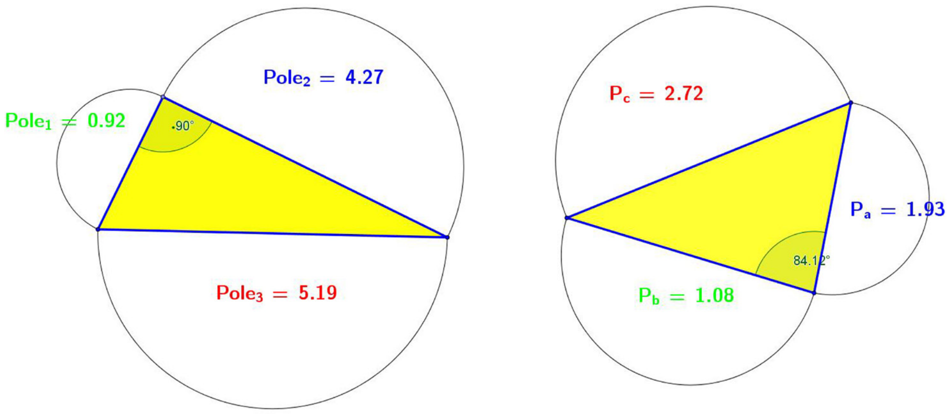


rys. 61

Chwytając myszą za wierzchołki wielokąta koloru pomarańczowego, zmieniasz kształt wszystkich wielokątów. Jaką cechę zachowują te wielokąty? Czy są one do siebie podobne? Sformułuj dostrzeżoną własność trójkąta prostokątnego, uwzględniając fakt dokonywania zmian w konfiguracji konstrukcji.

Podobną konstrukcję figur podobnych można wykonać, dobudowując na bokach trójkąta prostokątnego półkola i sprawdzić, czy zachodzi relacja Pitagorasa pomiędzy półkolami zbudowanymi na krótszych bokach tego trójkąta i półkolem zbudowanym na najdłuższym boku tego trójkąta. Jest też okazja sprawdzić, czy w trójkącie, który nie jest prostokątny, teza twierdzenia Piagorasa jest nadal prawdziwa.

Otwieramy plik ***SP11 Pitagoras04b.ggb***



rys. 62

KONSTRUKCJA SP11 Paradoks.ggb

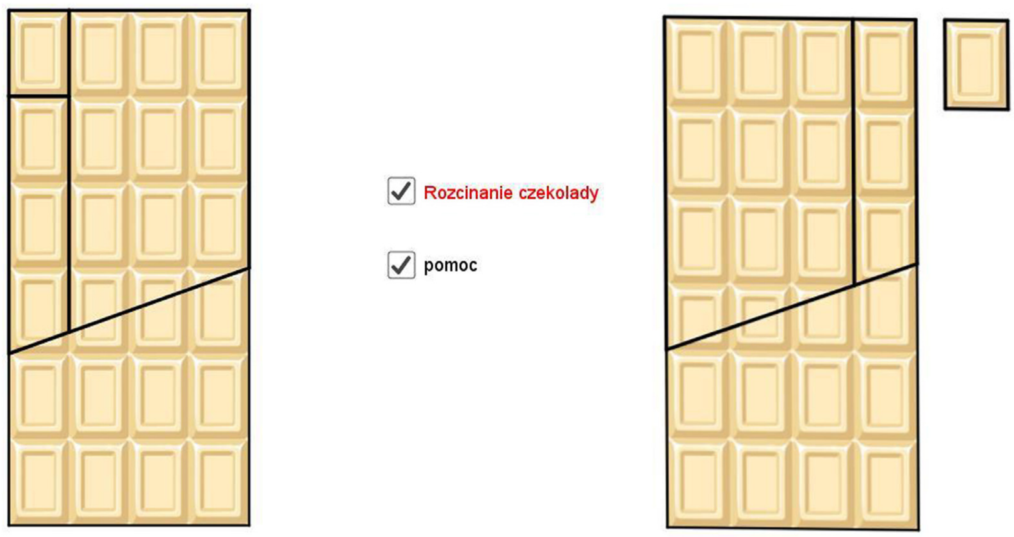
Na koniec w ramach podsumowania twierdzenia Pitagorasa pewne zadanie, które może uczniów szkoły podstawowej doprowadzić do niekłamanego zdziwienia.

Otwórzmy plik GeoGebry ***SP11 Paradoks.ggb***.

Tabliczkę czekolady, która liczy 24 kawałki (po sześć w czterech rzędach) rozcięto na 4 różne kawałki i okazało się, gdy spróbowano ją złożyć, ponownie miała ona 24 kawałki, ale został jeden kawałek. Cudowny sposób rozmnażania czekolady mimo zdarzania się cudów jest jednak podejrzany o matematyczne oszustwo.

Na czym ono polega?

Rozwiązanie nie jest trudne. Można nawet gołym okiem dostrzec, że rozcięcia nie przechodzą przez punkty„kratowe" czekolady. Wymaga to wykonania kilku obliczeń związanych z twierdzeniem Pitagorasa. Życzę powodzenia w rachunkach.



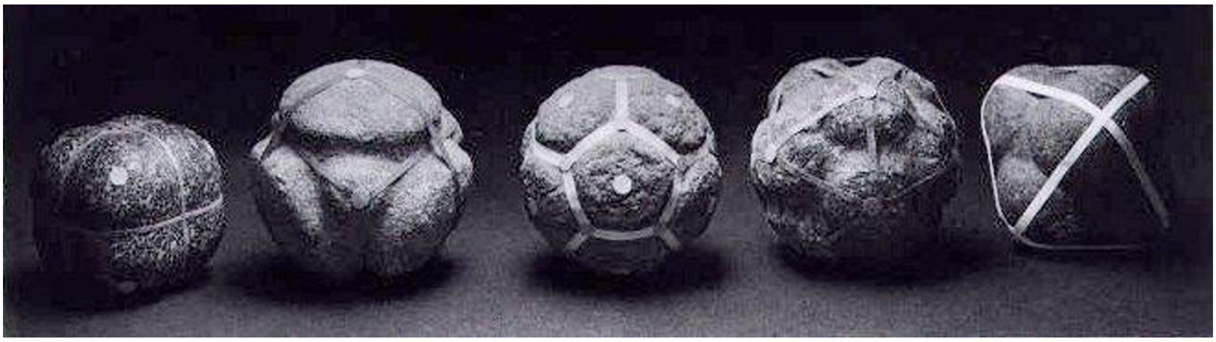
rys. 63

Pozostałe tematy związane z twierdzeniem Pitagorasa wejdą w zakres lekcji dla LO.

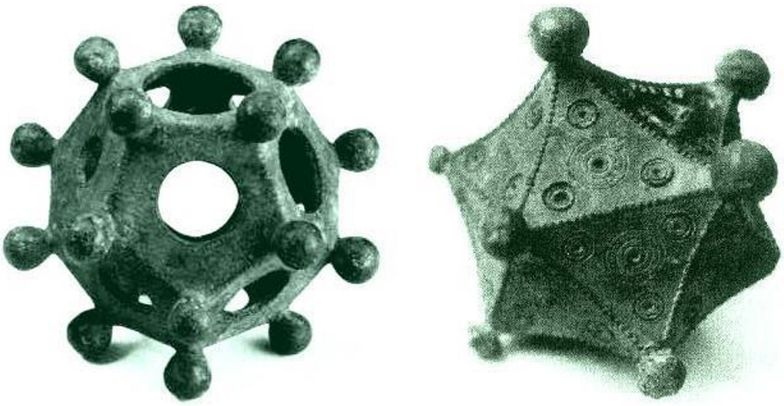
POZNAJEMY WIELOŚCIANY

Już od Starożytności matematycy wiedzieli, że istnieje 5 wielościanów, które mają przystające ściany i przystające naroża. Nazwano je foremnymi, ale od nazwiska greckiego filozofa i matematyka Platona, który je opisał w swoim dziele, nazywamy je również platońskimi.

O tym, że wielościany te były znane od stuleci, wiemy na podstawie badań archeologicznych, w których odnaleziono ozdoby i wisiorki darowane przez bogatych możnowładców ich żonom i innym kobietom. Poniżej widzimy kilka z nich. Również rzymscy legioniści, którzy dotarli do północnych rejonów Niemiec, a potem również do Anglii i Szkocji, stosowali do grania w kości wyciosane z kamienia małe modele wielościanów platońskich.



rys. 64



rys. 65

Wielościany platońskie są protoplastami licznych rodzin wielościanów. Niektóre z nich uczniowie poznają dopiero w liceum.

Wielościanów platońskich jest łącznie pięć: ***czworościan foremny***, ***sześcian***, ***ośmiościan foremny***, ***dwunastościan foremny*** i ***dwudziestościan foremny***. Dowód, że istnieje ich pięć, uczniowie będą mieli możliwość poznać w klasach matematycznych liceum.

Teraz uczniowie poznają wielościany platońskie przez konstruowanie ich siatek, a potem ich sklejanie.

W kolejnych plikach GeoGebry uczniowie otrzymują na ekranie wirtualne, obracające się wielościany, a właściwie, poprawnie mówiąc, rzuty tych wielościanów. Ściany tych wielościanów pomalowane są tym samym kolorem, jeśli są równoległe i znajdują się naprzeciw siebie. Czyli do pomalowania każdego z nich użyto tyle kolorów, ile stanowi połowa liczby ścian.

Jeżeli będziemy chcieli w którymś wielościanie policzyć liczbę jego krawędzi, wierzchołków lub ścian, to pamiętajmy, że ze względu na symetrie płaszczyznowe wystarczy policzyć je dla połowy wielościanu i potem podwoić tę liczbę.

Dobrym ćwiczeniem dla uczniów klasy VII i VIII jest dłuższe oglądanie nieruchomego wielościanu i na podstawie widocznych symetrii wyznaczenie liczby ich ścian lub krawędzi. To pobudza wyobraźnię, gdyż uczeń musi zobaczyć to, czego nie widać – w myśli obraca bryłę, domyślając się, co jest po drugiej stronie wielościanu ze względu na symetrię.

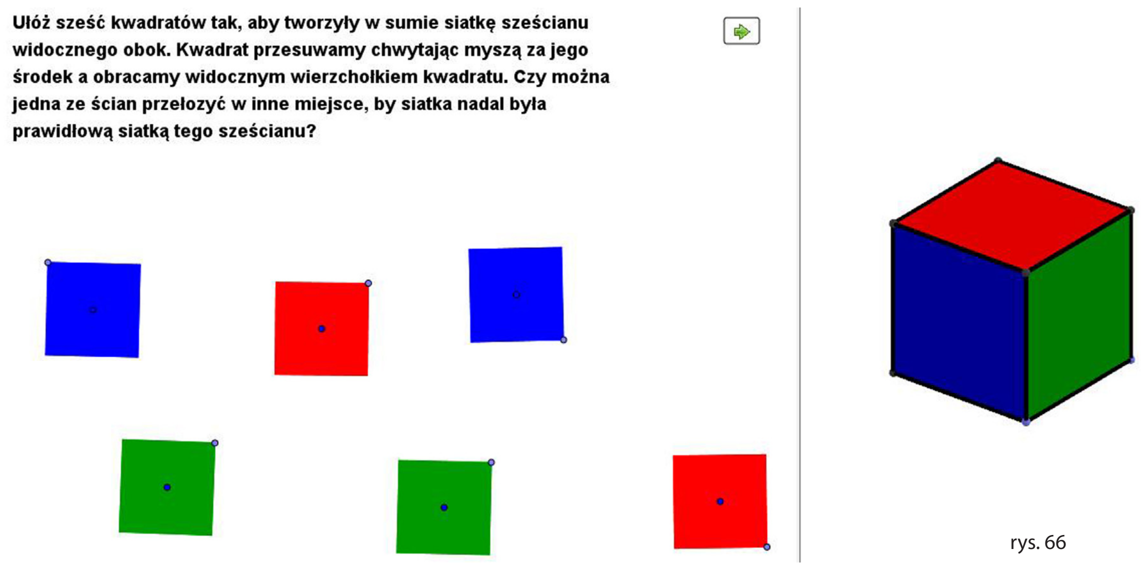
SP12 SZEŚCIAN

Otwieramy plik ***SP12 sześcian.ggb***

Wędrówkę w krainie wielościanów rozpoczynamy od najbardziej znanego sześcianu.

Obraca się on wokół pionowej osi na trójwymiarowym ekranie. Na drugim ekranie 2D widoczne są rozsypane ściany sześcianu – sześć kwadratów. Uczniowie mają za zadanie tak ułożyć te kwadratowe ściany, aby udało się z nich skleić ten wielościan. Każdy z kwadratów możemy przesuwać, chwytając myszą za jego środek, a obracać, chwytając za wyróżniony wierzchołek.

Potem wystarczy wyciąć z kartonu odpowiednią liczbę kwadratów, dorysowując do nich tzw. patki do łączenia ścian ze sobą. Potem już wystarczy tylko je skleić ze sobą. Patki można dorysować do wszystkich krawędzi ściany i potem obciąć niepotrzebne. Oto zrzut ekranu pliku ***SP12 sześcian.ggb***



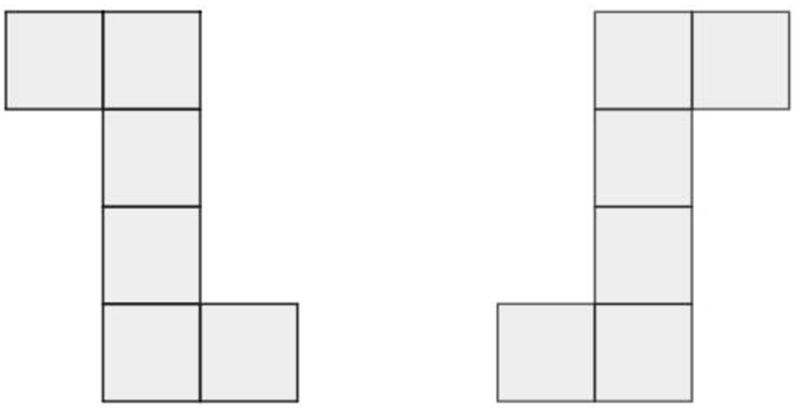
rys. 66

Są ***dwa sposoby sklejania wielościanów*** – albo zakładki przyklejamy do sąsiedniej ściany, albo zakładki do zakładek. W pierwszym przypadku łatwiej to zrobić i bryła jest stabilna, ale łatwo ją wgnieść na krawędziach. W drugim przypadku krawędzie są usztywnione jak kątownik, ale patki mogą się rozklejać w miejscu łączenia. Trzeba więc iść na kompromis i obie te metody dostosować do sytuacji.

Następna zasada przy sklejaniu wielościanów to: sklejamy zawsze mniejszy wielokąt do większego. To utrzymuje wielościan w lepszej kondycji i trudniej go uszkodzić.

Gdy uczniowie na swoich ekranach utworzą siatki sześcianu, to pojawia się pytanie, na ile różnych sposobów udało im się to zrobić. Wiadomo, że sześcian ma 11 różnych siatek i dobrze byłoby, gdyby uczniowie jako zadanie domowe „zrzucili" swoje ekrany z siatkami z GeoGebry do programu Paint i po powrocie na kolejnej lekcji porównali je ze sobą. W ten sposób wyznaczą liczbę wszystkich możliwych układów siatek sześcianu.

Uwaga – dwie siatki przedstawione poniżej to ta sama siatka, tylko odwrócona w drugą stronę. Ciekawe, czy uczniowie odkryją ten fakt.



rys. 67

Znajdźmy w pracowni matematycznej jakiś zakurzony model krawędziowy sześcianu (wykonany z drutu lub z patyków drewnianych) i oświetlajmy go projektorem na białym ekranie. Jakie rzuty tego sześcianu mogą zobaczyć uczniowie na tym ekranie. Niech je wypiszą w swoich zeszytach.

Na poniższym pliku ***SP12 siatki 6scianu.ggb*** możemy zobaczyć wszystkie możliwe siatki sześcianu wg pewnej ich klasyfikacji.

rys. 68

Kolejne własności sześcianu możemy badać, poszukując przekroje sześcianu.

Zapraszam do obejrzenia sześciu dynamicznych tzw. gifów animowanych:

Przekroj_szescianu_01.gif

Przekroj_szescianu_02.gif

Przekroj_szescianu_03.gif

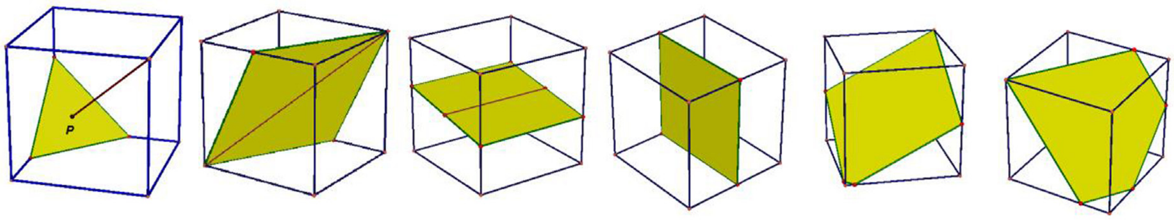
Przekroj_szescianu_04.gif

Przekroj_szescianu_05.gif

Przekroj_szescianu_06.gif

Znajdują się one na CD w katalogu ***GIFY ANIMOWANE.***

Ilustruje je rys. 69.



rys. 69

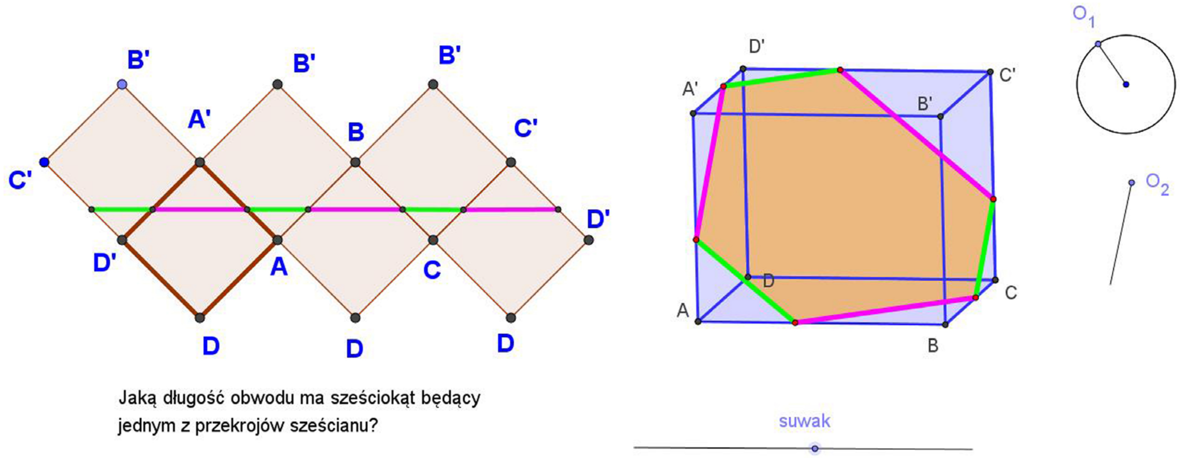
Szczególnym z wielu przekrojów sześcianu jest przekrój prostopadły do jego przekątnej. Daje on przekrój trójkątny (trójkąty równoboczne) lub sześciokątny (sześciokąty są środkowosymetryczne).

Przypatrzmy się uważnie tym przekrojom, które są sześciokątami niekoniecznie równobocznymi, ale środkowosymetrycznymi, co się objawia tym, że mają trzy pary boków równoległych do siebie.

Który z nich ma największy obwód?

Szczegółową odpowiedź na to pytanie uzyskamy, badając konstrukcję ***SP12 obwód przekroju sześcianu.ggb***.

Ta dynamiczna konstrukcja ukazuje nie tylko sześcian, ale interesujący nas przekrój, a nawet siatkę sześcianu, na której widać boki wielokąta stanowiącego ten przekrój.



rys. 70

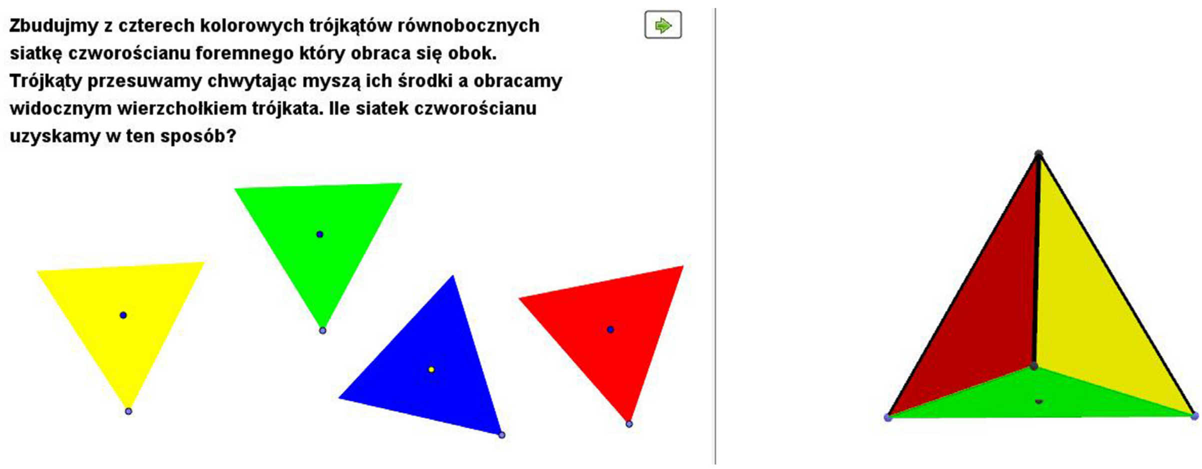
Widzimy wyraźnie, że w miarę przesuwania się suwakiem przesuwa się również płaszczyzna przekroju i zmieniają się dynamicznie w płynny sposób przekroje prostopadłe do przekątne ***DB'*** sześcianu. Możemy też odczytać na siatce obwód każdego z tych przekrojów i widać, że wszystkie te przekroje, które są sześciokątami (niekoniecznie foremnymi), mają ten sam obwód. Widać nawet, jaka jest długość tego obwodu – trzykrotna długość przekątnej sześcianu.

SP12 CZWOROŚCIAN

Otwórzmy kolejny plik: ***SP12 czworościan.ggb***

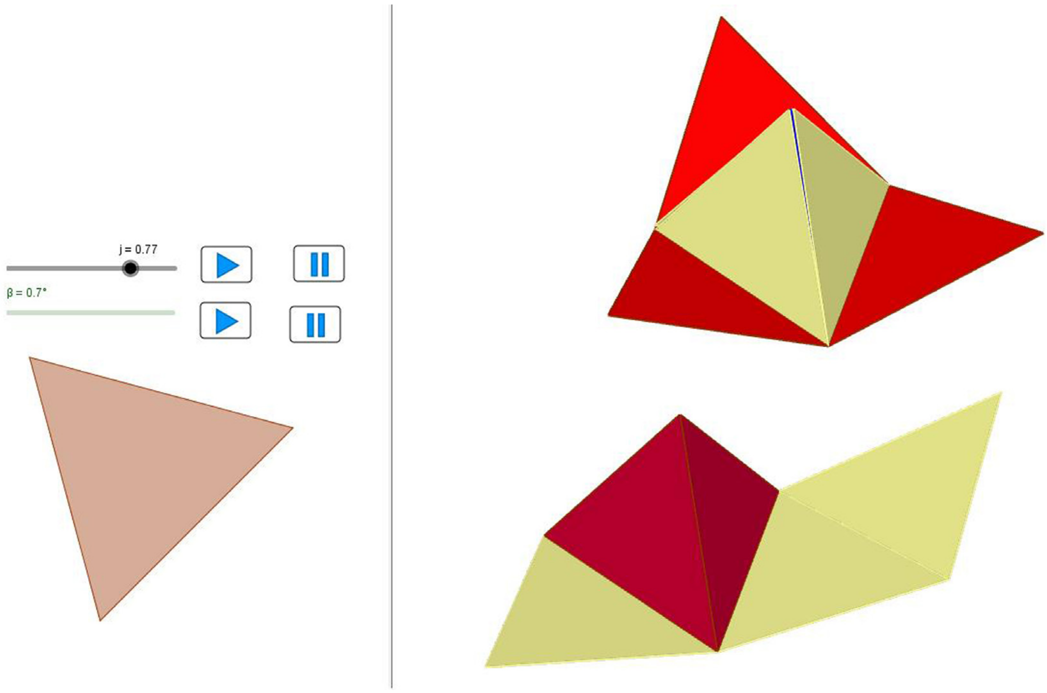
Wielościan ten jest tzw. ***simpleksem trójwymiarowym***. Simpleks to wielościan (na płaszczyźnie wielokąt) o minimalnej liczbie ścian (boków), która go zamyka w danej przestrzeni. Simpleksem płaszczyzny jest więc trójkąt.

Wykonując składanie czworościanu z trójkątów, uczniowie powinni odkryć, że ma on tylko dwie różne siatki.



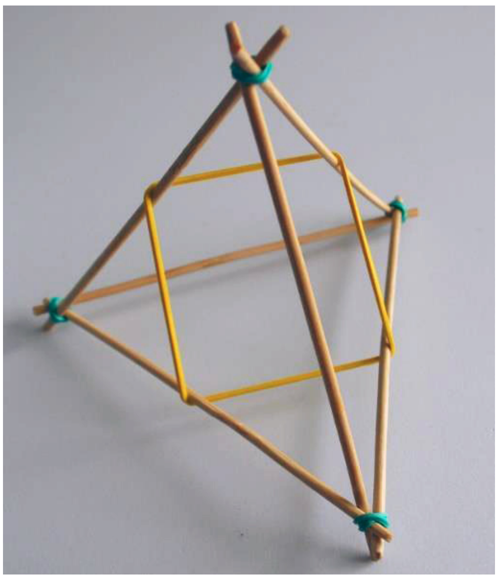
rys. 71

Możemy je zobaczyć w dynamicznej konstrukcji GeoGebry ***SP12 siatki 4scianu.ggb***.

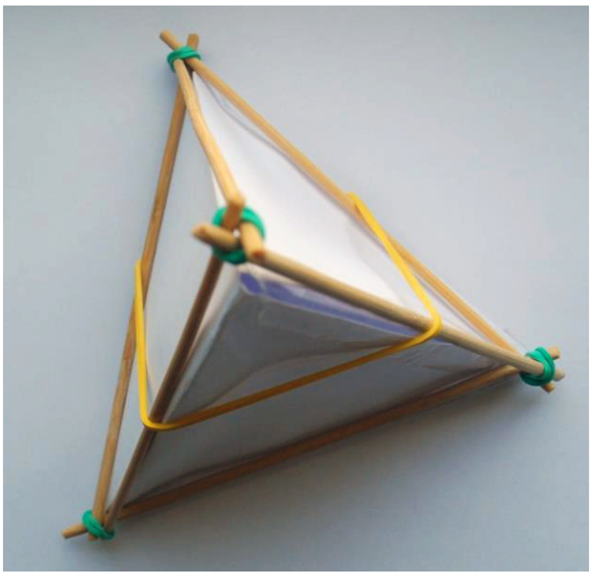


rys. 72

A teraz wykonajmy doświadczenie na żywym modelu czworościanu. Przygotujmy wcześniej 6 patyczków (takich od szaszłyków) o długości ok 10 cm i kilka gumek recepturek różnych wielkości. Z patyczków zbudujmy krawędziowy model czworościanu, łącząc je recepturkami po trzy tak, jak to ilustruje rysunek. 73a.



rys. 73 a



rys. 73 b

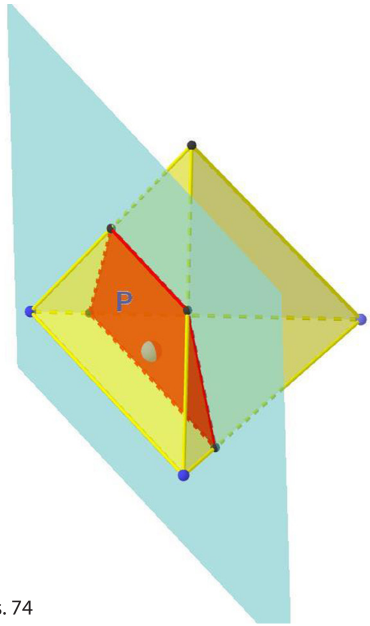
Teraz wykonajmy z kartki papieru A4 czworościan i umieśćmy go w modelu wykonanym z patyków – rys. 73b.

Sposób, w jaki uzyskać czworościan z kartki papieru, opisany jest na filmie. Najlepiej go obejrzeć w programie ***Windows Media Player.***

Następnie znajdźmy dłuższą recepturkę i tak ją nałóżmy na wykonany czworościan, by recepturka ułożyła się w kształt czworokąta – rys. 73a lub rys. 73b.

Jakie czworokąty można ułożyć z tej recepturki? Czy uzyskamy równoległobok, trapez, prostokąt, romb, kwadrat?

Popatrzmy na dynamiczną konstrukcję ***SP12 przekroje 4scianu.ggb*** i odpowiedzmy sobie na to pytanie.



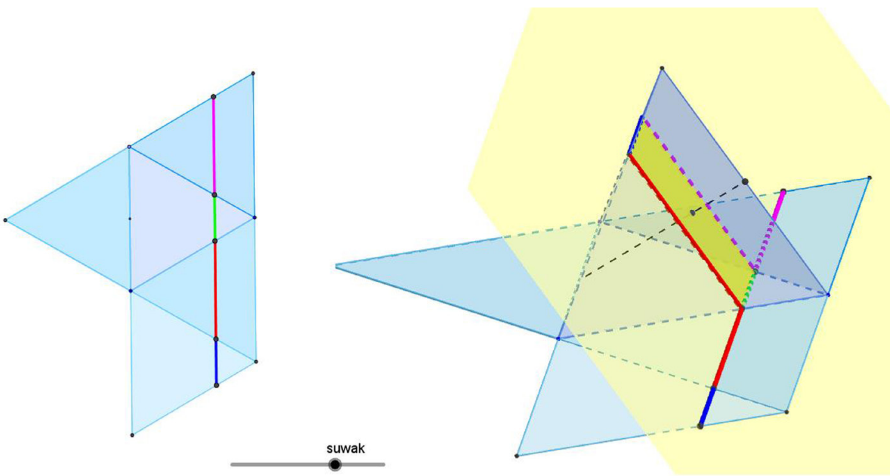
rys. 74

Powtórnie nałóżmy na ten model czworościanu recepturkę, ale tak, by ułożyła ona dokładnie kwadrat (rys. 73a). W jaki sposób należy ją ułożyć na tym czworościanie? (Odp. – tak, by przechodziła przez środki czterech krawędzi).

Narysujmy ołówkiem na papierowych ścianach czworościanu takie odcinki, które będą stanowić prostokątne przekroje tego czworościanu, równoległe do kwadratowego przekroju. Który z nich ma największy obwód? – rys. 76.

Jeśli są kłopoty z odpowiedzią na to pytanie, obejrzyjmy poniższą konstrukcję wykonaną w GeoGebrze 3D.

Otwórzmy plik ***SP12 obwody przekrojów 4 sc.ggb***



rys. 75

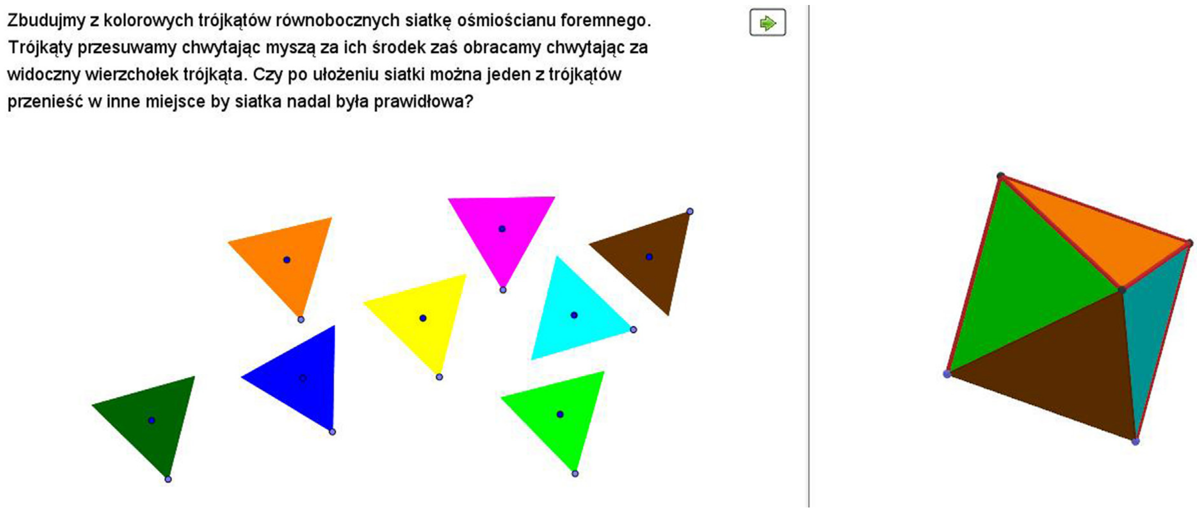
Suwak dołączony do konstrukcji umożliwia przesuwanie płaszczyzny przekroju czworościanu równolegle do jego kwadratowego przekroju i pokazuje prostokąty, których obwód można odczytać po lewej stronie konstrukcji. Który z nich jest najdłuższy?

rys. 76

Więcej o czworościanie można dowiedzieć się z mojego filmu znajdującego się na YouTube pod adresem: https://www.youtube.com/watch?v=I1JFh7dKLdA

SP 12 OŚMIOŚCIAN FOREMNY

Przechodzimy do ośmiościanu foremnego – ***plik SP12 ośmiościan.ggb***.



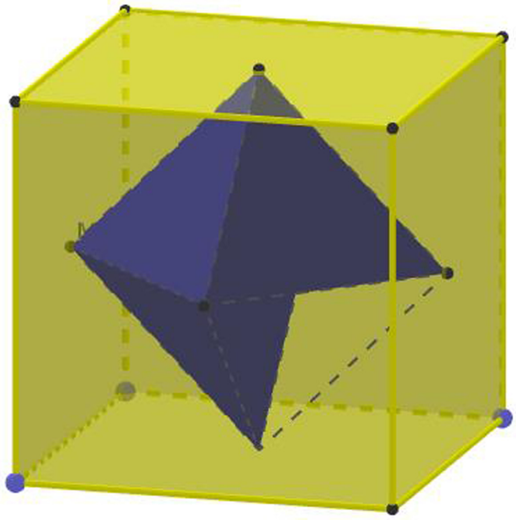
rys. 77

Jak widać, można go skleić również z trójkątów równobocznych i to znowu na 11 sposobów, podobnie jak sześcian. To jest związane z tzw. dualnością wielościanów, o czym będzie za chwilę.

Popatrzmy, jak można uzyskać ośmiościan foremny z sześcianu.

Wyznaczmy środki ścian sześcianu i połączmy każdy z nich z najbliższymi czterema. Utworzymy w ten sposób osiem trójkątnych ścian wewnątrz sześcianu i powstanie nowy wielościan o ośmiu ścianach. Czy ściany te są foremne? Czy już wiesz, jaki to wielościan?

A teraz powtórzmy to jeszcze raz w pliku ***SP12 Uzyskanie 8scianu.ggb***



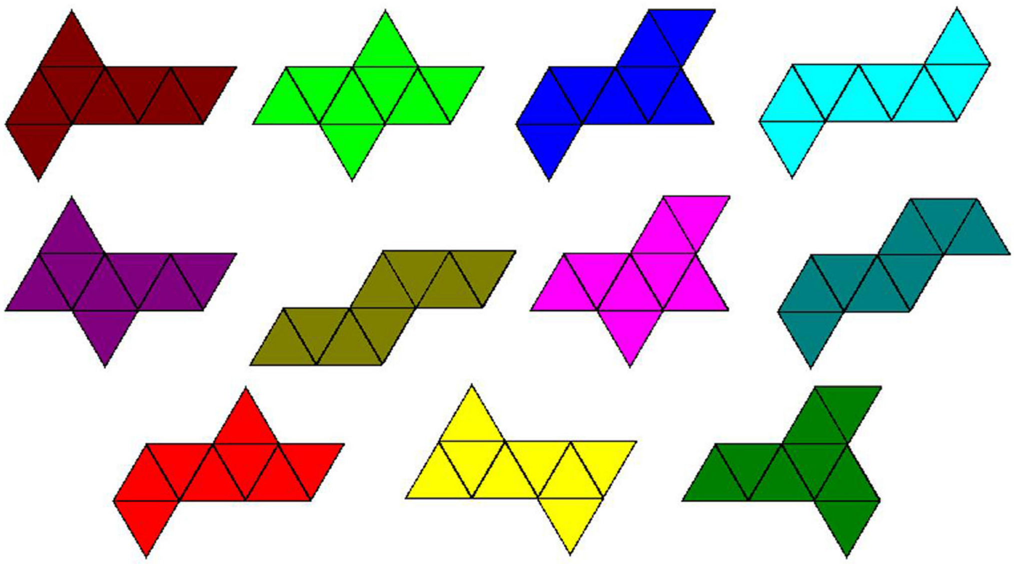
rys. 78

Doświadczenie przeprowadzone na sześcianie, z którego powstał ośmiościan uczy nas, jak dla danego wielościanu utworzyć wielościan dualny.

Definicja

Dwa wielościany są dualne, gdy jeden z nich ma wierzchołki w środkach ścian drugiego.

Zatem ośmiościan jest dualny do sześcianu, a sześcian dualny dla ośmiościanu
Ciekawy jest fakt, że liczba krawędzi obu wielościanów dualnych jest taka sama. Sprawdź ten fakt.
A co jest wielościanem dualnym dla czworościanu foremnego?
Warto jeszcze zobaczyć wszystkie 11 możliwych siatek ośmiościanu foremnego.



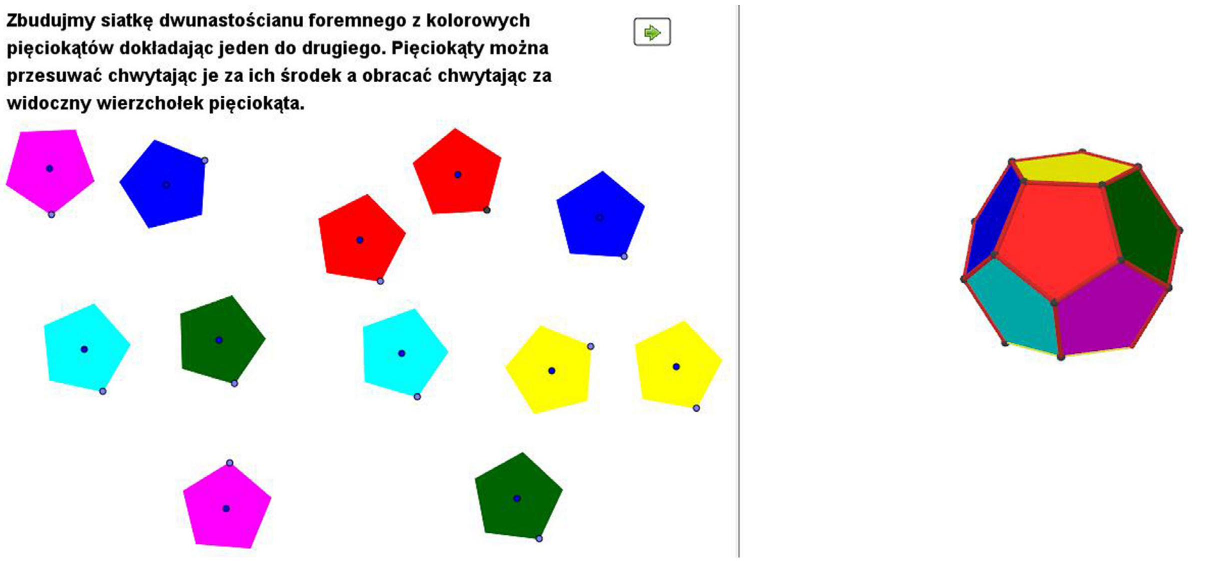
rys. 79 a

SP12 DWUNASTOŚCIAN I DWUDZIESTOŚCIAN FOREMNY

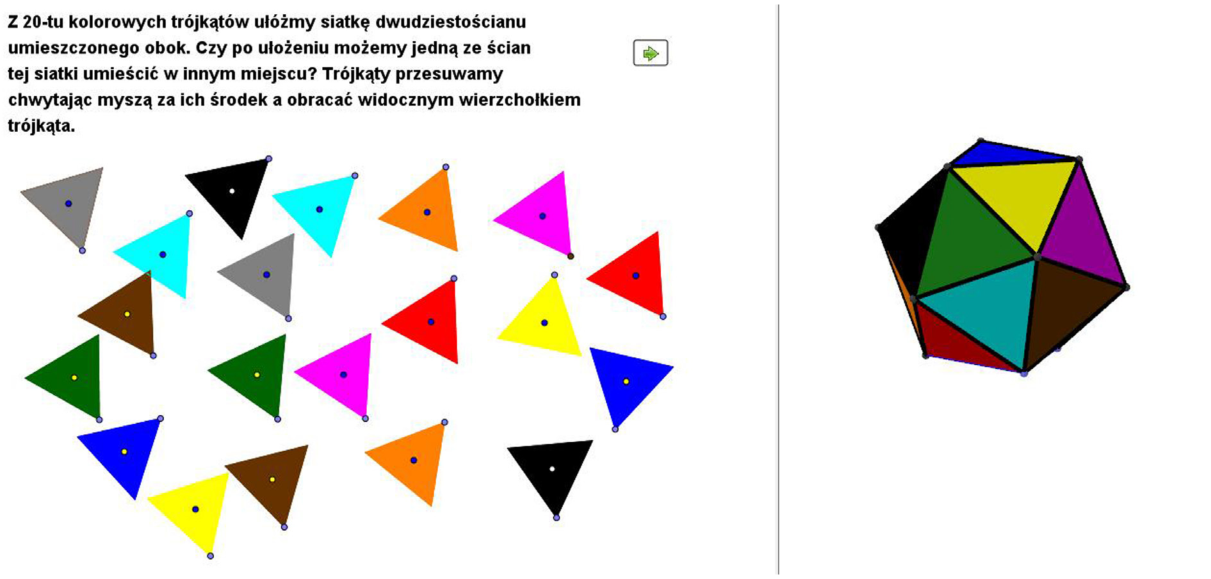
Ostatnie dwa wielościany foremne zbudowane są na bazie złotej liczby. Zarówno złotą liczbę, jak i te dwa wielościany uczniowie poznają w liceum. Ale składanie pięciokątnych ścian dwunastościanu foremnego i trójkątnych dwudziestościanu pozwoli im stworzyć samodzielnie te wielościany, które mogą się podobać uczniowi szkoły podstawowej. Otwórzmy dwa pliki ***SP12 dwunastościan.ggb*** oraz ***SP12 dwudziestościan.ggb***.

Gdy uczniowie zaczną składać siatki dwunastościanu foremnego i dwudziestościanu foremnego, to okaże się, że nie wystarczy ich w klasie, by pokazać wszystkie różniące się od siebie siatki tego wielościanu. Aż trudno uwierzyć, ale dwunastościan, podobnie jak dwudziestościan można złożyć na 43 380 sposobów.

Ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu nie ma w GeoGebrze w menu głównym programu. Wielościany tworzy się jednym poleceniem: ***Ośmiościan(A,B), Dwunastościan (A,B)*** i podobnie ***Dwudziestościan(A,B)***, gdzie ***A*** i ***B*** są wybranymi wcześniej punktami – dwoma jego wierzchołkami.



rys. 79 b



rys. 80

ĆWICZENIE WYOBRAŹNI PRZESTRZENNEJ

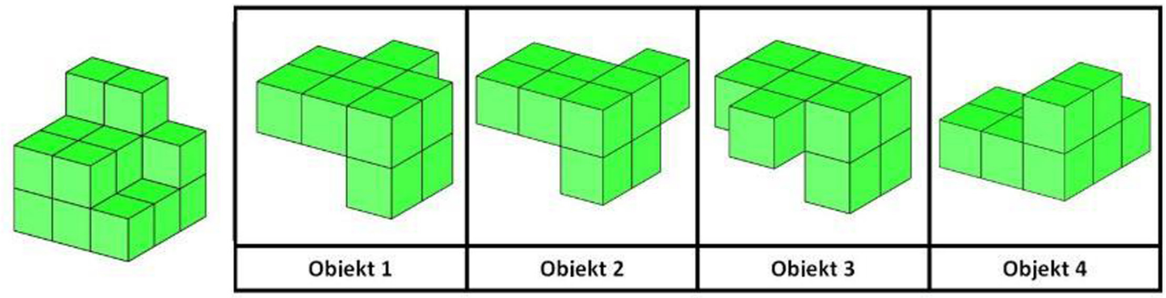
SP 13 Uzupełnianie do sześcianu

Ten test przygotowany w GeoGebrze i nie ma na celu sprawdzanie wiedzy ucznia, lecz ćwiczenie jego wyobraźni przestrzennej.

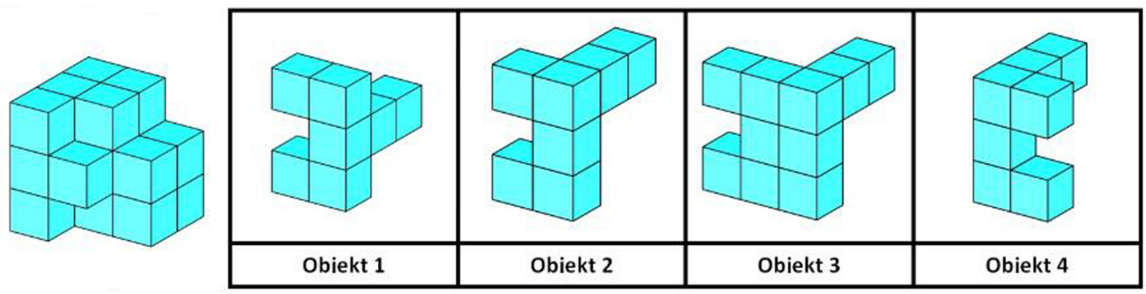
Pierwsze zadanie polega na odnalezienia takiego wielościanu, który uzupełni inny wskazany wielościan do sześcianu – ***plik SP13 test1.ggb***

Oto polecenie GeoGebry w tym pliku:

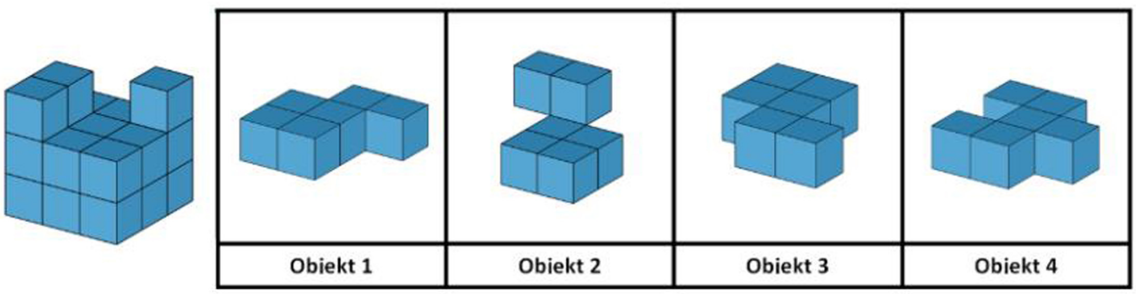
Chwyć myszą szare kółeczko i wskaż nim obiekt, który wraz z obiektem leżącym poza ramką tworzy pełny sześcian.



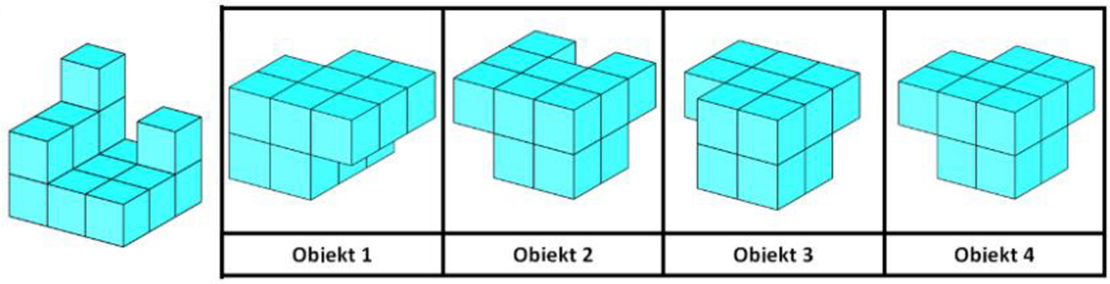
rys. 81



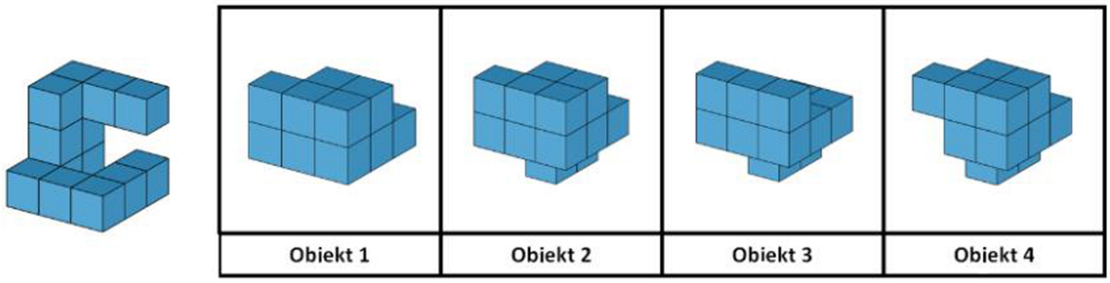
rys. 82



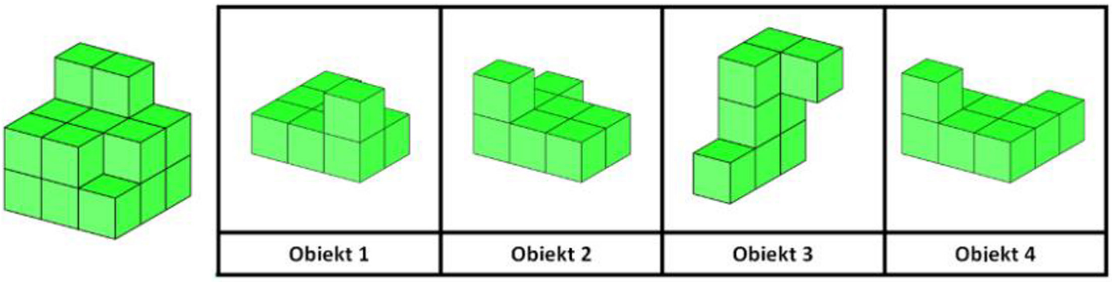
rys. 83



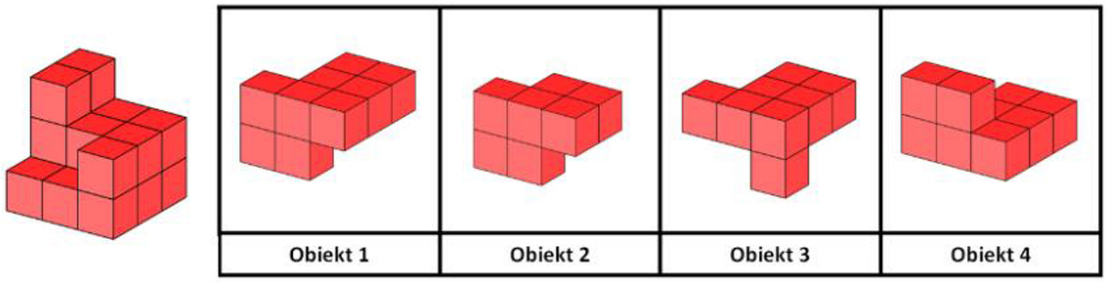
rys. 84



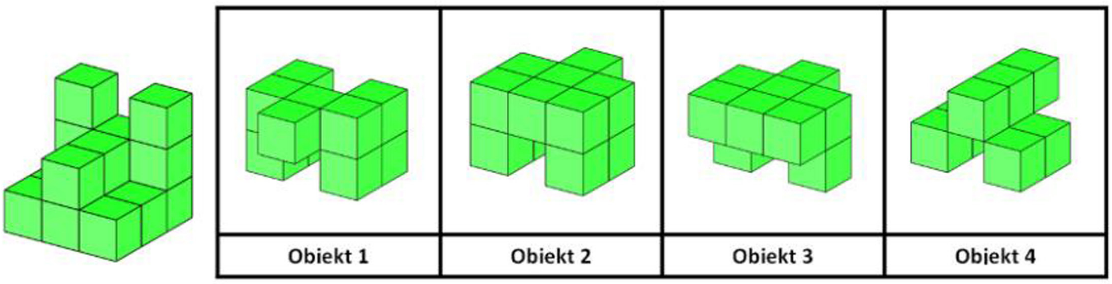
rys. 85



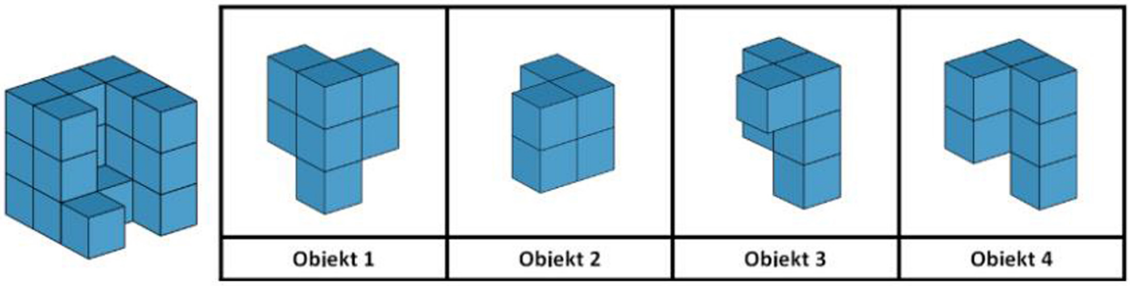
rys. 86



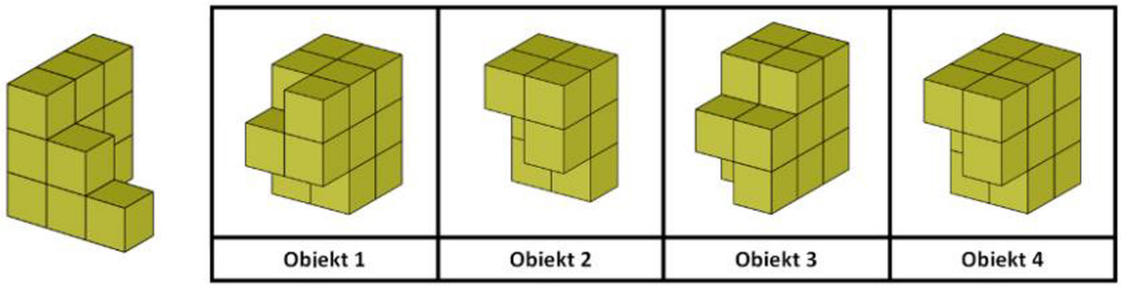
rys. 87



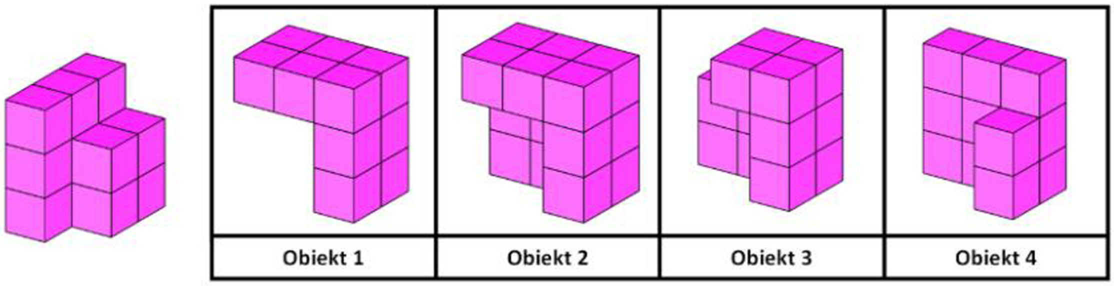
rys. 88



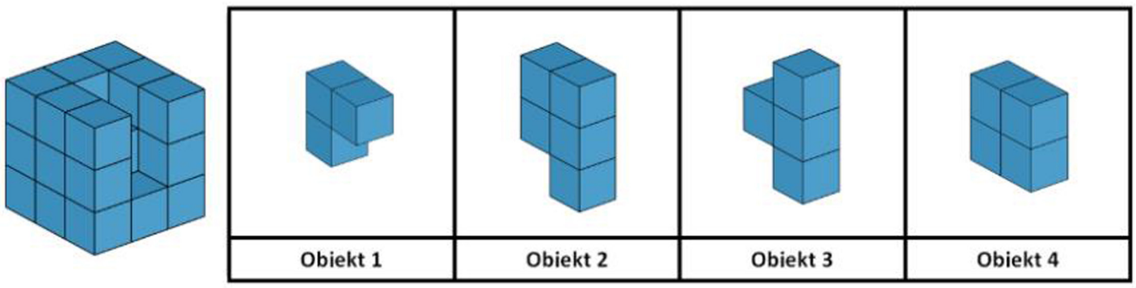
rys. 89



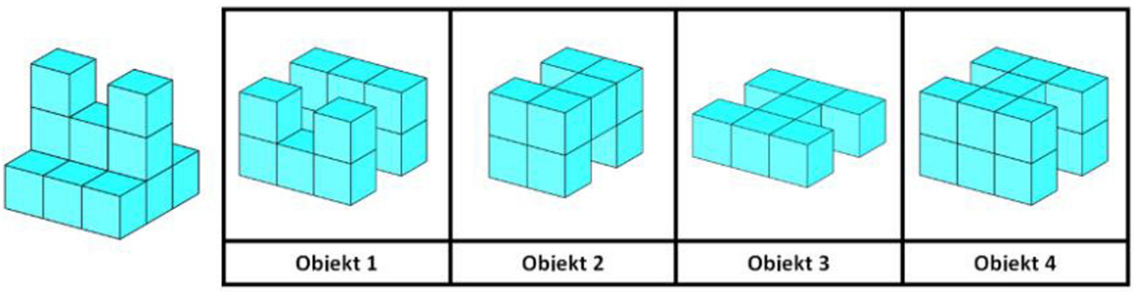
rys. 90



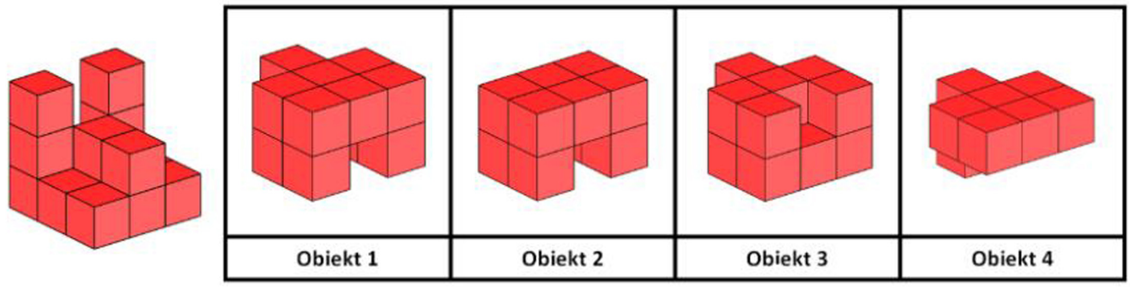
rys. 91



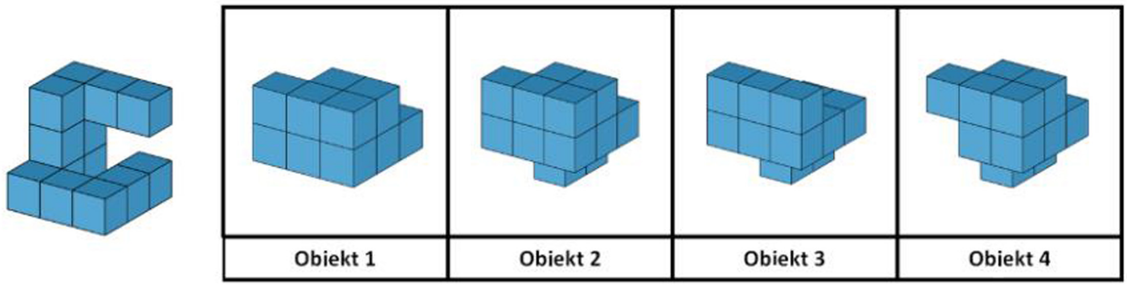
rys. 92



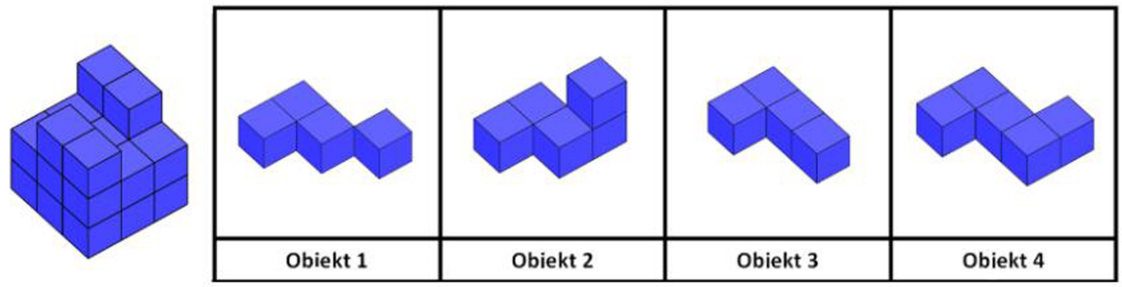
rys. 93



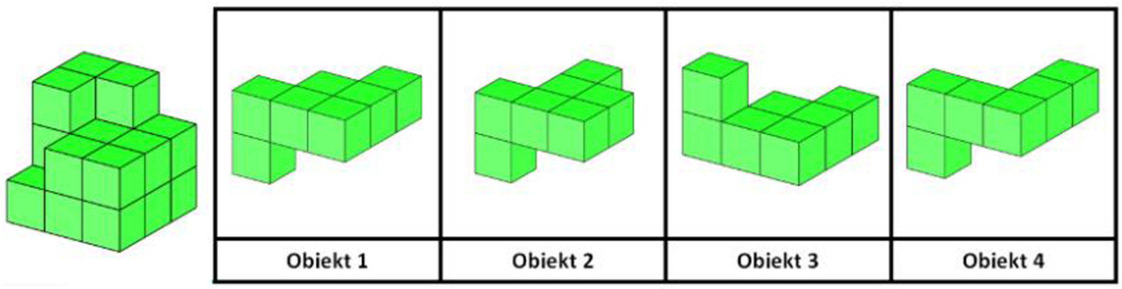
rys. 94



rys. 95



rys. 96

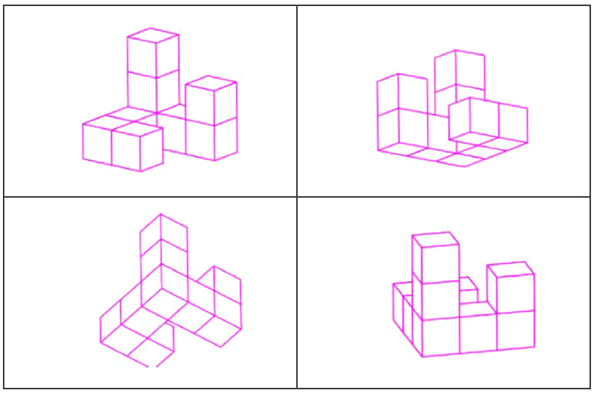


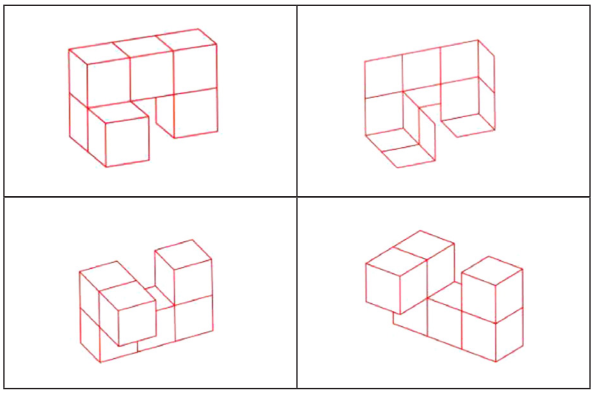
rys. 97

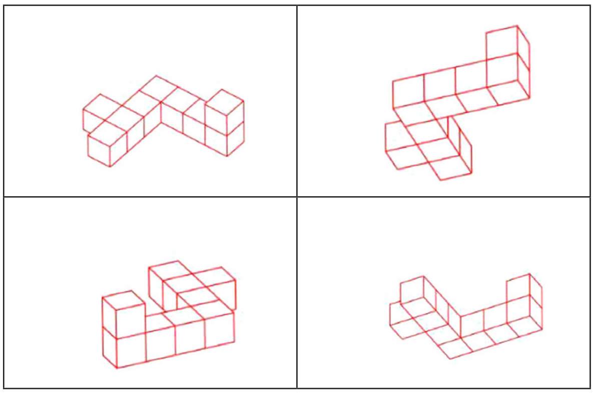
SP23 OBCY OBIEKT

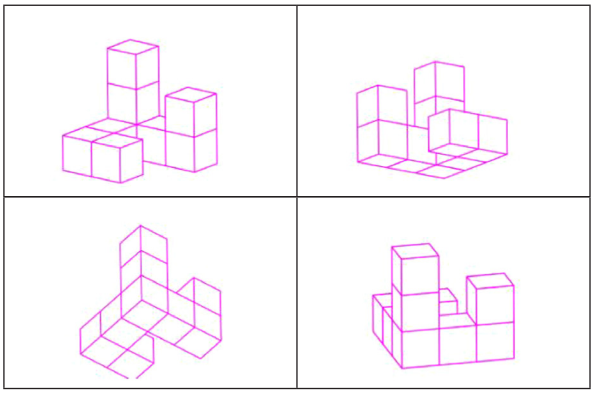
Kolejny test wyrabiający lepszą orientację i wyobraźnię przestrzenną to test ***SP13 test2.ggb***. Rysunek prezentuje trzy rzuty tego samego obiektu oraz czwarty rzut obcego obiektu. Problem polega na tym, by wyłowić spośród tych trzech ten obcy obiekt i wskazać go myszą, przeciągając szare kółko i do tego obiektu.

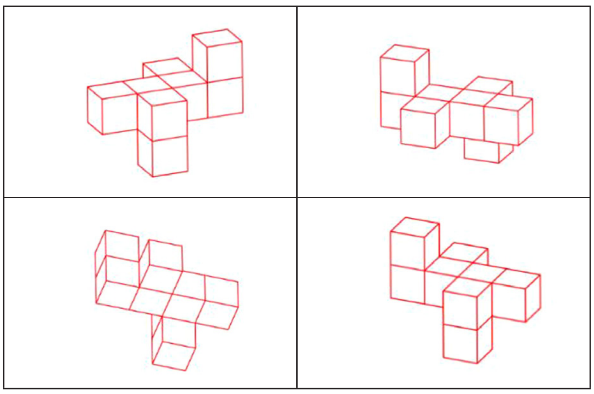
Gdyby testy te nie mogłyby być wykonywane z GeoGebrą, można je rozwiązywać z wykorzystaniem samych rysunków.

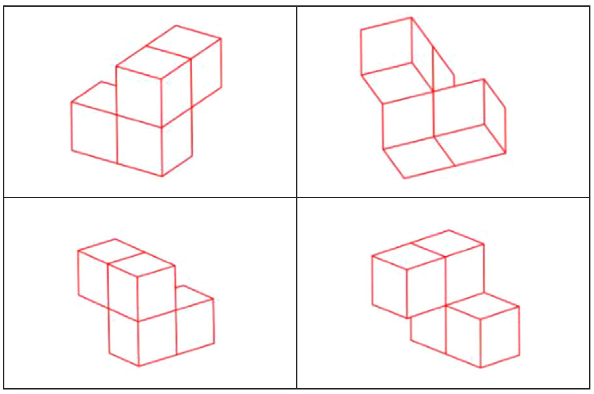

rys. 98

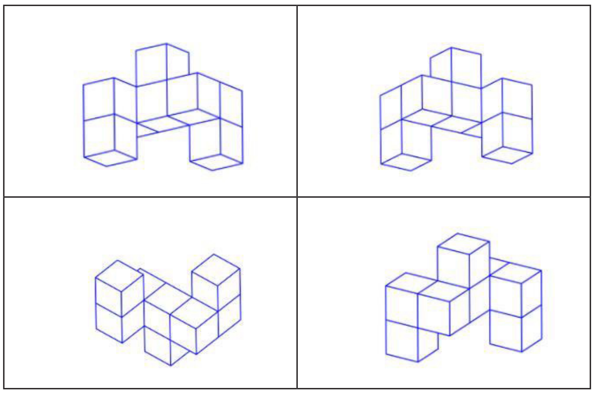

rys. 99


rys. 100

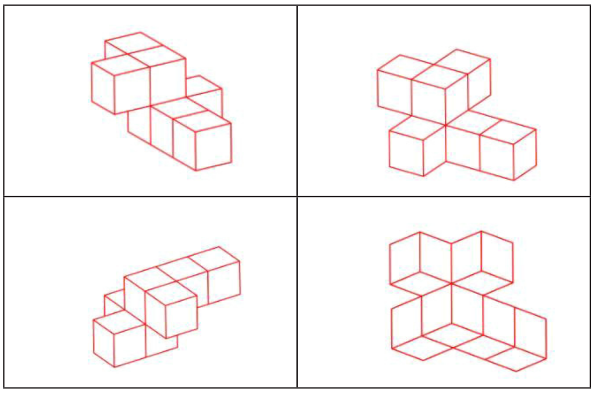

rys. 101


rys. 102

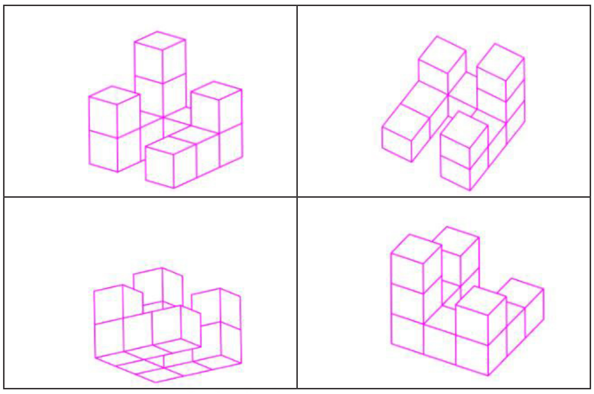

rys. 103



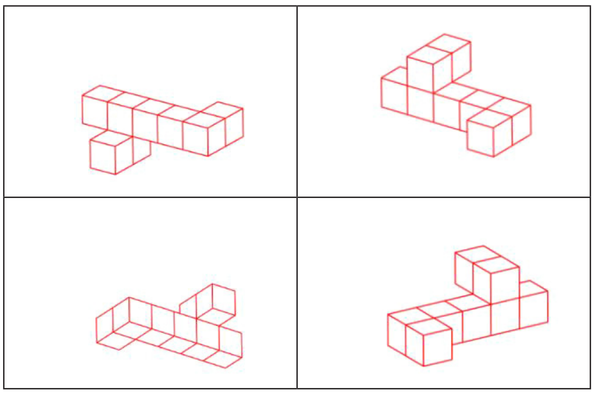
rys. 104



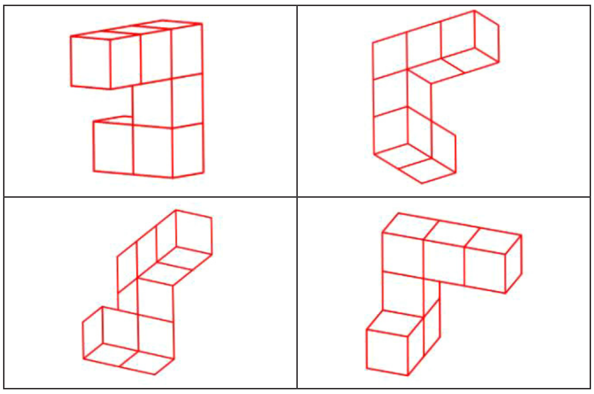
rys. 106



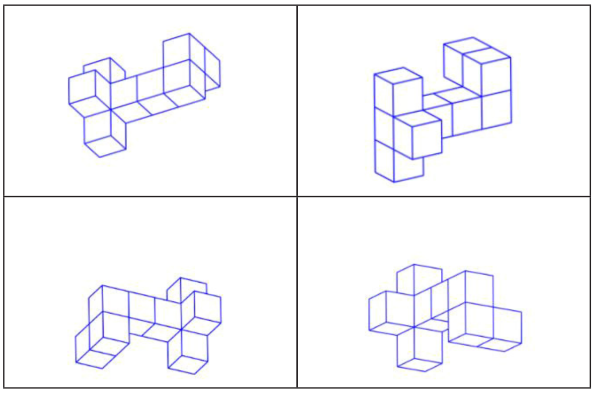
rys. 108



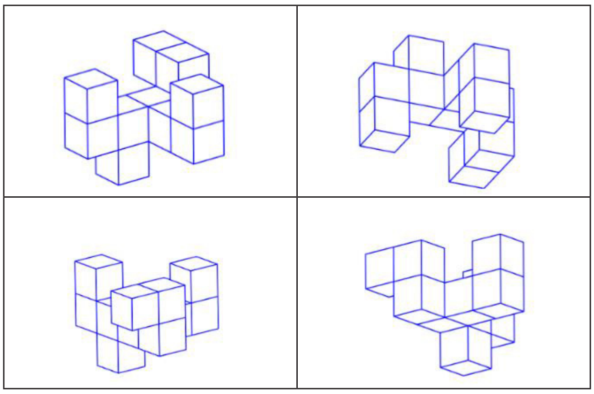
rys. 110



rys. 105



rys. 106



rys. 109